

Eléments de mathématiques

S. Bervoets - M. Faure

Table des matières

1	Éléments de Logique, raisonnements	3
1.1	Calcul propositionnel	6
1.1.1	Définition d'une proposition	6
1.1.2	Les connecteurs logiques « et » et « ou »	7
1.1.3	Négation d'une proposition	8
1.1.4	Implication logique \Rightarrow	8
1.1.5	Equivalence logique \Leftrightarrow	9
1.1.6	Démonstration avec les tables de vérité	10
1.1.7	C.N.S., ssi, il faut et il suffit	13
1.1.8	Exercices	14
1.2	Les quantificateurs	15
1.2.1	Définition	16
1.2.2	Propriétés des quantificateurs	17
1.2.3	Exercices	22
1.3	Les grands types de raisonnement	23
1.3.1	Raisonnement direct	23
1.3.2	Cas par cas	24
1.3.3	Contraposée	24
1.3.4	Absurde	25
1.3.5	Contre-exemple	25
1.3.6	Récurrence	26
2	Bases mathématiques	28
2.1	suites, convergence	28
2.1.1	suites réelles	28
2.1.2	suites vectorielles	33
2.1.3	Exercices	38
2.2	topologie dans \mathbb{R}^d	40
2.2.1	Ouverts de \mathbb{R}^d	40
2.2.2	Fermés, compacts de \mathbb{R}^d	42
2.2.3	Exercices	45

3	Optimisation libre	47
3.1	Optimisation libre dans \mathbb{R}	47
3.2	Rappels de dérivation dans \mathbb{R}^n	49
3.2.1	Partial derivatives	50
3.2.2	Gradient and Hessian	51
3.2.3	Tangent plane	52
3.2.4	Chain rule	53
3.3	Optimisation libre dans \mathbb{R}^n	54
3.4	Concavité - Convexité	57
3.5	Exercices	59
4	Fonctions implicites	60
4.1	Some intuitions	60
4.2	The theorem	62
4.3	Generalization to higher dimensions	63
4.4	Comparative Statics	65
4.5	Exercices	68
5	Optimisation sous contraintes	70
5.1	Optimisation sous contraintes d'égalité	70
5.1.1	Une seule contrainte	70
5.1.2	Plusieurs contraintes d'égalité	73
5.1.3	Exercices	77
5.2	Optimisation sous contraintes d'inégalité	79
5.2.1	Contraintes mixtes	83
5.2.2	Convexité	83
5.2.3	Exercices	85

Chapitre 1

Eléments de Logique, raisonnements

Man : Oh look, this isn't an argument.

Arguer : Yes it is.

M : No, it isn't. It's just contradiction.

A : No, it isn't.

M : It is!

A : It is not.

M : Look, you just contradicted me.

A : I did not.

M : Oh, you did!!

A : No, no, no.

M : You did just then.

A : Nonsense!

M : Oh, this is futile!

A : No, it isn't.

M : I came here for a good argument.

A : No, you didn't ; no, you came here for an argument.

M : An argument isn't just contradiction.

A : It can be.

M : No, it can't. An argument is a connected series of statements intended to establish a proposition.

A : No, it isn't.

M : Yes it is! It's not just contradiction.

A : Look, if I argue with you, I must take up a contrary position.

M : Yes, but that's not just saying 'No, it isn't.'

A : Yes, it is!

M : No, it isn't!

A : Yes, it is!

M : Argument is an intellectual process. Contradiction is just the automatic gainsaying of any statement the other person makes.

(short pause)

A : No, it isn't.

Mathematics consist in making *precise* statements and proving whether they are true or false. A *proof* is a series of arguments that are logically *valid*, and that lead from some premise to a conclusion. Premises are *propositions* or *assertions*, while the conclusion is the statement. A statement that is true is a *theorem*.

Some arguments are correct, some are not.

If it is snowing, then it is cold outside.

It is snowing.

Therefore, it is cold outside.

If it is snowing, then it is cold outside.

It is cold outside .

Therefore, it is snowing.

Either you are an Olympique de Marseille fan or a Paris Saint Germain fan.

You are not a PSG fan.

Therefore, you are an Olympique de Marseille fan.

All humans are green.

Some green things are edible

Therefore, some humans are edible.

All humans are green.

Some green things are not edible .

Therefore, some humans are not edible.

All glorphs are wibbles

All wibbles are fnoffles.

Therefore, all glorphs are fnoffles.

All glorphs are wibbles

Some wibbles are fnoffles.

Therefore, some glorphs are fnoffles.

Some politicians are cheaters

No woman cheats

Therefore, no women is a politician

If it has rained, then the grass is wet

The grass is wet

Therefore, it has rained.

The objective of this section is to classify which arguments are correct and which are not, and to know which tools can be used to prove that statements are true or false.

A last example : A logician and his friend.

- Logician : "I just had a baby"
- Friend : "Congratulations ! Is it a boy or a girl ?"
- Logician : "Yes"

1.1 Calcul propositionnel

1.1.1 Définition d'une proposition

Une *proposition* (ou *assertion*) est un énoncé pouvant être vrai ou faux mais pas les deux en même temps. On utilise en général les lettres P , Q , R etc. pour désigner les propositions.

Exemples :

- *Il pleut.*
- *Je suis plus grand que toi.*
- $2 + 2 = 4$
- $2 \times 3 = 7$
- $x^2 \geq 0$

L'énoncé de la dernière proposition dépend de x . On va alors écrire $P(x) : x^2 \geq 0$.

- *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x)$.*
- $P(x, y) : x + y > 2$
- $P(x, y, z, n) : x^n + y^n = z^n$
- *Il n'existe pas de $x, y, z, n \in (\mathbb{N}^*)^4$, $n \geq 3$ tels que $P(x, y, z, n)$*

La dernière proposition est le théorème de Fermat. A partir d'une ou plusieurs propositions, on peut en construire d'autres, en utilisant des *connecteurs*. Le statut (vrai ou faux) de la nouvelle proposition se déduit d'une *table de vérité*.

Nous allons définir 5 connecteurs logiques permettant de construire des propositions complexes. Pour illustrer, supposons que

P : "J'aime les mathématiques" Q : "J'aime l'économie"

\bar{P} : "Je n'aime pas les mathématiques"
$P \wedge Q$: "J'aime les mathématiques et j'aime l'économie"
$P \vee Q$: "J'aime les mathématiques ou l'économie"
$P \implies Q$: "Si j'aime les mathématiques, alors j'aime l'économie"
$P \iff Q$: "J'aime les mathématiques si et seulement si j'aime l'économie"

1.1.2 Les connecteurs logiques « et » et « ou »

Soient P et Q deux propositions. On peut définir la proposition « P et Q », notée $P \wedge Q$ par la table de vérité ci-dessous.

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Par exemple si P est l'assertion *Cette carte est un as* et Q l'assertion *Cette carte est cœur* alors l'assertion P et Q est vraie si la carte est l'as de cœur et est fausse pour toute autre carte.

On définit aussi la proposition « P ou Q », notée $P \vee Q$, par la table de vérité suivante :

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Si P est l'assertion *Cette carte est un as* et Q l'assertion *Cette carte est cœur* alors l'assertion P ou Q est vraie si la carte est un as ou bien un cœur (en particulier elle est vraie pour l'as de cœur).

COMMENTAIRE 1 — On peut noter que $P \vee Q$ est fausse si et seulement si P et Q sont fausses alors que $P \wedge Q$ est vraie si et seulement si P et Q sont vraies.

— Il existe en français deux significations du mot « ou ». Il y a le « ou exclusif » qui signifie « soit l'un, soit l'autre, mais pas les deux » et le « ou inclusif » qui signifie « soit l'un, soit l'autre, soit les deux ». \vee est le « ou inclusif ».

1.1.3 Négation d'une proposition

Soit P une proposition. On définit sa négation, notée \overline{P} (ou aussi $\text{non}P$ ou $\neg P$), à partir de sa table de vérité.

P	\overline{P}
V	F
F	V

Cette simple table contient en germe un très grand nombre d'erreurs de raisonnement à venir et ceci dans à peu près tous les chapitres. On doit déjà avoir conscience que la négation de « ce chat est blanc » est, non pas « ce chat est noir », mais tout simplement « ce chat n'est pas blanc » ou que le contraire de la phrase « f est la fonction nulle » est, non pas « f ne s'annule pas », mais « f n'est pas la fonction nulle » ou encore « f ne s'annule pas en au moins un point ». Enfin, le contraire de la phrase « $x \geq 0$ » est « $x < 0$ », et non pas « $x \leq 0$ ».

1.1.4 Implication logique \implies

Si P et Q sont deux propositions, on définit l'implication logique $P \implies Q$ par sa table de vérité.

P	Q	$P \implies Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

L'assertion $P \implies Q$ se lit en français *P implique Q*.

Elle se lit souvent aussi *si P est vraie alors Q est vraie* ou *si P alors Q*.

Par exemple :

- $0 \leq x \leq 25 \implies \sqrt{x} \leq 5$ est vraie (prendre la racine carrée).
- $x \in]-\infty, -4[\implies x^2 + 3x - 4 > 0$ est vraie (étudier le binôme).
- $\sin(\theta) = 0 \implies \theta = 0$ est fausse (regarder pour $\theta = 2\pi$ par exemple).
- $2 + 2 = 5 \implies \sqrt{2} = 2$ est vraie ! Eh oui, si P est fausse alors l'assertion $P \implies Q$ est toujours vraie.

Illustrons pourquoi « (Faux \implies Faux) est vraie ».

Vérifions que, pour tout entier naturel n , $[(10^n + 1 \text{ divisible par } 9) \implies (10^{n+1} + 1 \text{ divisible par } 9)]$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. La condition « $10^n + 1$ divisible par 9 » fournit un entier naturel K tel que $10^n + 1 = 9K$. Maintenant, puisque

$$10^{n+1} + 1 = 10 \times 10^n + 1 = 10 \times (10^n + 1) - 10 + 1 = 10 \times (10^n + 1) - 9 = 10 \times 9K - 9 = 9(10K - 1),$$

on obtient comme conséquence de l'hypothèse initiale le fait que l'entier $10^{n+1} + 1$ est divisible par 9. L'implication proposée est totalement exacte et pourtant, aucune des deux phrases encadrant cette implication ne sont vraies (puisque les nombres 2, 11, 101, 1001... ne sont à l'évidence pas divisibles par 9). D'ailleurs, en écrivant cette implication, nous ne nous sommes *jamais* demandé si la première phrase écrite était vraie. Ceci sera crucial pour comprendre le raisonnement par récurrence (voir section suivante sur les types de raisonnements).

Illustrons maintenant pourquoi « (Faux \Rightarrow Vrai) est vraie ».

$$2 = 3 \text{ et } 2 = 1 \Rightarrow 2 + 2 = 3 + 1 \Rightarrow 4 = 4.$$

L'affirmation de départ est fausse et on en déduit (tout à fait par hasard mais par un raisonnement tout à fait juste) une affirmation vraie. L'affirmation finale est vraie, mais **ce ne sont pas les implications écrites qui la démontrent**.

Une conséquence importante est que, si votre hypothèse de départ est fausse, bien que par la suite vous teniez des raisonnements entièrement justes, vous n'avez aucune idée en fin de raisonnement de la véracité ou de la fausseté des conclusions auxquelles vous êtes parvenu(e). Conclusion : pour qu'une preuve soit correcte, il faut à la fois que les hypothèses soient correctes ET que les implications qui en découlent soient correctes. C'est pourquoi TOUS les théorèmes sont vrais sous certaines hypothèses qu'il convient de bien connaître !

Attention : Une erreur très fréquente consiste à penser que $P \Rightarrow Q$ est la même chose que $Q \Rightarrow P$. "Il pleut" implique que "l'herbe est mouillée". Mais "l'herbe est mouillée" n'implique PAS qu'il a plu. Elle peut être mouillée pour d'autres raisons. On peut voir avec les tables de vérité où les deux implications diffèrent.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	V	F
F	F	V	V

On voit par exemple que si Q est vrai et P est faux, alors $P \Rightarrow Q$ est vrai tandis que $Q \Rightarrow P$ est faux.

1.1.5 Equivalence logique \iff

DÉFINITION 1. Deux propositions équivalentes P et Q sont deux propositions simultanément vraies et simultanément fausses.

En termes logiques, P et Q sont équivalentes si elles ont **les mêmes valeurs de vérité**.

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Vous devez lire en première ligne de ce tableau que si les propositions P et Q sont vraies, la proposition $P \Leftrightarrow Q$ est vraie, et en deuxième ligne, que si P est vraie et Q est fausse, $P \Leftrightarrow Q$ est fausse.

L'équivalence logique joue pour les propositions le même rôle que joue l'égalité pour les nombres. Les expressions $3 + 2$ et 5 ne sont pas identiques et pourtant on écrit $3 + 2 = 5$. De même, les propositions $(x^2 = 1)$ et $(x = 1 \text{ ou } x = -1)$ ne sont pas identiques et pourtant on écrit $(x^2 = 1) \Leftrightarrow (x = 1 \text{ ou } x = -1)$.

Remarque : Si $A \Leftrightarrow B$, alors $\overline{A} \Leftrightarrow \overline{B}$.

1.1.6 Démonstration avec les tables de vérité

A partir de ces 5 connecteurs et de leur table de vérité, il est possible de démontrer qu'une proposition est vraie ou fausse, une fois admis les prémisses. Il suffit de construire les propositions à démontrer et regarder leur colonne dans la table.

Théorème 1. Soit P une proposition. $\overline{(\overline{P})} \Leftrightarrow P$.

Exemple : $P : x > 2$. Alors $\overline{P} : x \leq 2$. Et $\overline{(\overline{P})} > 2$

Démonstration.

P	\overline{P}	$\overline{(\overline{P})}$
V	F	V
F	V	F

Il est clair que $\overline{(\overline{P})}$ et P ont les mêmes valeurs de vérité. \square

Théorème 2. Soient P et Q deux propositions. $\overline{P \wedge Q} \Leftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q}$ et $\overline{P \vee Q} \Leftrightarrow \overline{P} \wedge \overline{Q}$.

(Le contraire de « et » est « ou » et le contraire de « ou » est « et »).

Exemple : $P : x > 2$, $Q : x > 3$. Alors $P \wedge Q : x > 3$, donc $\overline{P \wedge Q} : x \leq 3$. De même $\overline{P \vee Q} : x \leq 2 \vee x \leq 3$, donc $\overline{P \vee Q} : x \leq 3$

Egalement, $P \vee Q : x > 2$, donc $\overline{P \vee Q} : x \leq 2$. Et $\overline{P} \wedge \overline{Q} : x \leq 2 \wedge x \leq 3$, donc $\overline{P} \wedge \overline{Q} : x \leq 2$

Démonstration. On démontre ces équivalences à l'aide de tables de vérité.

P	Q	$P \wedge Q$	$\overline{P \wedge Q}$	\overline{P}	\overline{Q}	$\overline{P \vee Q}$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

P	Q	$P \vee Q$	$\overline{P \vee Q}$	\overline{P}	\overline{Q}	$\overline{P} \wedge \overline{Q}$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V

Dans chaque table, on lit effectivement les mêmes valeurs de vérité dans les quatrième et septième colonnes. \square

Théorème 3. Soient P et Q deux propositions. $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{P} \vee Q)$.

Exemple : P : "Il pleut", Q : "L'herbe est mouillée". Si $P \Rightarrow Q$, alors soit il ne pleut pas (auquel cas on ne peut rien dire sur l'herbe), soit il pleut, auquel cas l'herbe est mouillée. Donc $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\overline{P} \vee Q)$. Il en va de même pour l'implication inverse.

Démonstration. $P \Rightarrow Q$ est fausse dans l'unique cas où P est vraie et Q est fausse ou encore quand \overline{P} et Q sont toutes deux fausses. $P \Rightarrow Q$ a donc les mêmes valeurs de vérité que $\overline{P} \vee Q$. Rédigez la table pour vous en convaincre. \square

Théorème 4. (Propositions équivalentes) Soient P et Q deux propositions.

$$\text{Alors, } (P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)).$$

Démonstration.

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V

\square

C'est un moment important. **Une équivalence signifie deux implications, l'une de « gauche à droite » et l'autre de « droite à gauche ».**

Quand vous écrivez $P \Leftrightarrow Q$, vous devez être convaincu que la proposition de gauche P entraîne la proposition de droite Q et aussi que la proposition de droite Q entraîne la proposition de gauche P .

Théorème 5. (Négation d'une implication) Soient P et Q deux propositions.

$$\overline{P \Rightarrow Q} \Leftrightarrow P \wedge \overline{Q}.$$

Exemple : $P : x > 2$, $Q : x > 3$. Alors $P \Rightarrow Q$ est faux, donc $\overline{P \Rightarrow Q}$. On peut trouver x tel que $x > 2$ et $x \leq 3$, donc $P \wedge \overline{Q}$.

Exemple : La négation de "S'il pleut je vais au cinéma" n'est donc pas "S'il pleut je ne vais pas au cinéma", c'est "Il pleut et je ne vais pas au cinéma".

Démonstration. On peut écrire les tables de vérité. On peut aussi remarquer qu'on a :

$$\overline{P \Rightarrow Q} \Leftrightarrow \overline{\overline{P} \vee Q} \Leftrightarrow \overline{\overline{P}} \wedge \overline{Q} \Leftrightarrow P \wedge \overline{Q}.$$

□

DÉFINITION 2. (Contraposée d'une implication)

Soient P et Q deux propositions. L'implication $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ s'appelle la **contraposée** (ou l'implication contraposée) de l'implication $P \Rightarrow Q$.

Exemple : $P : x > 2$, $Q : x > 1$. Alors $P \Rightarrow Q$ est vrai, et pour le montrer, c'est équivalent de montrer que $x \leq 1$ implique $x \leq 2$.

La contraposée d'une implication est équivalente à celle-ci. Ceci fournira plus loin un type de raisonnement usuel : le raisonnement par contraposition.

Théorème 6. (Contraposée d'une implication) Soient P et Q deux propositions.

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}).$$

Démonstration. La table de vérité est :

P	Q	$P \Rightarrow Q$	\overline{P}	\overline{Q}	$\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

□

DÉFINITION 3. (Réciproque d'une implication)

Soient P et Q deux propositions. L'implication $Q \Rightarrow P$ s'appelle la **réciproque** (ou l'implication réciproque) de l'implication $P \Rightarrow Q$.

Attention, une erreur souvent commise consiste à penser que si $P \Rightarrow Q$, alors $Q \Rightarrow P$. Ceci est FAUX! Exemple : $x > 3 \Rightarrow x > 2$. Or $x > 2$ n'implique PAS $x > 3$.

Regardons les tables de vérité pour s'en convaincre.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	V	F
F	F	V	V

Les deux colonnes ne sont pas identiques. \square

La négation de $(P \Rightarrow Q)$ est $(P \wedge \overline{Q})$.
La contraposée de $(P \Rightarrow Q)$ est $(\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$.
La réciproque de $(P \Rightarrow Q)$ est $(Q \Rightarrow P)$.

Par exemple, (pour $n \geq 2$), l'implication $(I) : (n \text{ premier et } n \neq 2) \Rightarrow (n \text{ impair})$ est vraie.

- La contraposée de l'implication (I) est : $(n \text{ pair}) \Rightarrow (n = 2 \text{ ou } n \text{ non premier})$ et est (obligatoirement) vraie.
- La réciproque de l'implication (I) est : $(n \text{ impair}) \Rightarrow (n \text{ premier et } n \neq 2)$ et est fautive (puisque 9 n'est pas premier).
- Enfin, la négation de l'implication (I) dit qu'on peut trouver n tel que $(n \text{ premier et } n \neq 2 \text{ et } n \text{ est pair})$. Cette négation est (obligatoirement) fautive.

1.1.7 C.N.S., ssi, il faut et il suffit

Les expressions « Condition nécessaire et suffisante (CNS) », « si et seulement si (ssi) », « il faut et il suffit » signifient toutes « logiquement équivalent » ou encore « \Leftrightarrow ». Mais plus précisément, dans chacune de ces expressions, quel morceau correspond à « \Rightarrow » et quel autre morceau correspond à « \Leftarrow »? La réponse est fournie par le tableau suivant :

\Rightarrow	\Leftarrow
condition nécessaire	condition suffisante
il faut	il suffit
seulement si	si

Exemple 1 : considérons $P : x > 2$ et $Q : x > 3$. Alors pour que Q soit vrai, il est *nécessaire* que P soit vrai. Pour que P soit vrai, il *suffit* que Q soit vrai (mais ce n'est pas nécessaire). On peut aussi dire " $x > 3$ seulement si $x > 2$ " et " $x > 2$ si $x > 3$ ".

Exemple 2 : considérons par exemple l'implication vraie : $(n \geq 3 \text{ et } n \text{ premier}) \Rightarrow n \text{ impair}$. Si on cherche à l'énoncer dans le langage courant, on dira : pour que n soit un nombre premier supérieur ou égal à 3, il est nécessaire, il est obligatoire, il faut que n soit impair, mais on peut dire aussi que n peut être un nombre premier supérieur ou égal à 3 seulement si n est impair.

Mais si l'on considère l'implication contraire (qui est fausse) à savoir : $n \text{ impair} \Rightarrow (n \geq 3 \text{ et } n \text{ premier})$, on dira que pour que n soit un nombre premier supérieur ou égal à 3, il n'est pas suffisant, il ne suffit pas que n soit impair ou encore, si n est impair, n n'est pas nécessairement un nombre premier supérieur ou égal à 3.

Considérons encore l'implication vraie : $(x + 1)^2 = 9 \Leftarrow x + 1 = 3$. Pour que $(x + 1)^2$ soit égal à 9, il suffit, il est suffisant que $x + 1$ soit égal à 3, ou encore $(x + 1)^2$ vaut 9 si $x + 1$ vaut 3. Mais, pour que $(x + 1)^2$ soit égal à 9, il n'est pas nécessaire, il n'est pas obligatoire que $x + 1$ soit égal 3 (car $x + 1$ peut aussi être égal à -3) ou encore l'égalité $(x + 1)^2 = 9$ ne se produit pas seulement si $x + 1$ vaut 3 (l'implication $(x + 1)^2 = 9 \Rightarrow x + 1 = 3$ est fausse).

1.1.8 Exercices

1- Soient P, Q et R trois propositions. Démontrer les équivalences logiques suivantes

- $(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$
- $(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$.
- $(P \wedge Q) \vee R \Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$
- $(P \vee Q) \wedge R \Leftrightarrow (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$.
- $((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$.

2- Démontrer que $(1 = 2) \Rightarrow (2 = 3)$.

3- Donner la définition du "ou" exclusif.

4- Écrire la négation des assertions suivantes où P, Q, R, S sont des propositions.

- $P \Rightarrow Q$
- P et non Q

- P et $(Q$ et $R)$
- P ou $(Q$ et $R)$
- $(P$ et $Q) \Rightarrow (R \Rightarrow S)$.

5- La proposition $(P \wedge Q \Rightarrow (\neg P) \vee Q)$ est-elle vraie ?

6- On suppose que la proposition P est vraie ainsi que les propositions suivantes :

1. $(\neg Q) \wedge P \Rightarrow \neg S$.
2. $S \Rightarrow (\neg P) \vee Q$.
3. $P \Rightarrow R \vee S$.
4. $S \wedge Q \Rightarrow \neg P$.
5. $R \wedge \neg(S \vee Q) \Rightarrow T$.
6. $R \Rightarrow (\neg P) \vee (\neg Q)$.

La proposition T est-elle vraie ?

7- Donner la négation des phrases suivantes :

- S'il fait beau j'irai à la plage
- Tous les habitants de la rue du Havre qui ont les yeux bleus gagneront au loto et prendront leur retraite avant 50 ans.
- tout triangle rectangle possède un angle droit
- dans toutes les écuries, tous les chevaux sont noirs

8- Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

- Si $x^2 > 1$ alors $x > 1$
- Si $x < -1$ alors $x^2 > 1$
- $x^2 > 1$ si $x < -1$
- $x > 1$ si et seulement si $x^2 > 1$

1.2 Les quantificateurs

An economist, a physicist and a mathematician are in a train in Scotland when they see a black sheep in a field.

- Economist : "Oh! Sheeps in Scotland are black!"

- Physicist : "Well, at least some sheeps are black"

- Mathematician : "No, there exists a field in which there is a sheep, of which at least one side is black!"

1.2.1 Définition

On a vu qu'il est possible de dire d'une proposition P si elle est vraie ou fausse. En revanche, lorsqu'une proposition dépend d'une ou plusieurs variables ($P(x)$, $P(x, y)$, ...), dire qu'elle est vraie ou fausse n'a pas de sens, puisque ça dépend de la valeur des variables. Par exemple, P : " $2 > 3$ " est fausse, tandis que Q : " $3 > 2$ " est vraie. En revanche, $P(x)$: " $x^2 > 1$ " est vraie si $x \in \mathbb{R} \setminus]-1, 1[$, fausse sinon. Il faut donc être précis dans les énoncés.

Le quantificateur \forall : "pour tout"

La proposition : « Pour tous les éléments x de E , la proposition $P(x)$ est vraie » s'écrit :

$$\ll \forall x \in E, P(x) \gg.$$

Par exemple :

- $\forall x \in [1, +\infty[$ ($x^2 \geq 1$) est une assertion vraie.
- $\forall x \in \mathbb{R}$ ($x^2 \geq 1$) est une assertion fausse.
- $\forall n \in \mathbb{N}$ $n(n+1)$ est divisible par 2 est vraie.

Le quantificateur \exists : "il existe"

La proposition : « il existe au moins un élément x de E tel que la proposition $P(x)$ est vraie » s'écrit :

$$\ll \exists x \in E / P(x) \gg \text{ ou aussi } \ll \exists x \in E, P(x) \gg.$$

Par exemple :

- $\exists x \in \mathbb{R}$ ($x(x-1) < 0$) est vraie (par exemple $x = \frac{1}{2}$ vérifie bien la propriété).
- $\exists n \in \mathbb{N}$ $n^2 - n > n$ est vraie (il y a plein de choix, par exemple $n = 3$ convient, mais aussi $n = 10$ ou même $n = 100$, un seul suffit pour dire que l'assertion est vraie).
- $\exists x \in \mathbb{R}$ ($x^2 = -1$) est fausse (aucun réel au carré ne donnera un nombre négatif).

Le quantificateur $\exists!$: "il existe un unique"

La proposition : « il existe un et un seul élément x de E tel que la proposition $P(x)$ est vraie » s'écrit :

$$\ll \exists! x \in E, P(x) \gg.$$

Par exemple :

- $\exists! x \in \mathbb{R}$ ($x(x-1) < 0$) est fausse (on peut en trouver deux).

- $\exists! n \in \mathbb{N} \quad 2^n = 4$ est vraie (le seul choix possible est $n = 2$).
- $\exists! x \in \mathbb{R} \quad (x^2 = -1)$ est fausse.

Exercice

Ecrire avec des quantificateurs les propositions suivantes :

- 1) f est la fonction nulle (où f est une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R}).
- 2) Le dénominateur D de f s'annule au moins une fois sur \mathbb{R} .
- 3) f est l'identité de \mathbb{R} (c'est-à-dire la fonction qui, à chaque réel, associe lui-même).
- 4) Le graphe de f coupe la droite d'équation $y = x$.
- 5) f est croissante sur \mathbb{R} (où f est une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R}).
- 6) L'équation $\sin x = x$ a une et une seule solution dans \mathbb{R} .
- 7) Pour tout point M du plan \mathcal{P} , M est sur le cercle \mathcal{C} de centre Ω et de rayon R si et seulement si la distance de M à Ω vaut R .

Solution

- 1) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$.
- 2) $\exists x \in \mathbb{R} / D(x) = 0$.
- 3) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x$.
- 4) $\exists x \in \mathbb{R} / f(x) = x$.
- 5) $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, (a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b))$.
- 6) $\exists! x \in \mathbb{R} / \sin(x) = x$.
- 7) $\forall M \in \mathcal{P}, (M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \Omega M = R)$.

COMMENTAIRE 2 En 5), il ne faut pas lire que pour tout couple (a, b) de réels, on a $a \leq b$ ou encore, il ne faut pas lire $(\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, a \leq b) \Rightarrow f(a) \leq f(b)$. Mais, il faut lire que pour tout couple (a, b) de réels, **l'implication** $(a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b))$ est vraie.

De la même façon, en 7), il ne faut pas lire que tout point du plan est sur le cercle (ou encore il ne faut pas lire $(\forall M \in \mathcal{P}, M \in \mathcal{C}) \Leftrightarrow \dots$) mais il faut lire que pour tout point du plan, il est équivalent de dire que M est sur le cercle et que $\Omega M = R$. Dans cette phrase, le point M a la possibilité de ne pas être sur le cercle.

1.2.2 Propriétés des quantificateurs

La négation des quantificateurs : « Le contraire de \forall est \exists et le contraire de \exists est \forall ».

La négation de $\forall x \in E, P(x)$ est $\exists x \in E$ non $P(x)$.

Par exemple la négation de $\forall x \in [1, +\infty[\quad (x^2 \geq 1)$ est l'assertion $\exists x \in [1, +\infty[\quad (x^2 < 1)$. En

effet la négation de $x^2 \geq 1$ est $\text{non}(x^2 \geq 1)$ mais s'écrit plus simplement $x^2 < 1$.

La négation de $\exists x \in E \quad P(x)$ est $\forall x \in E \quad \text{non } P(x)$.

Voici des exemples :

- La négation de $\exists z \in \mathbb{C} \quad (z^2 + z + 1 = 0)$ est $\forall z \in \mathbb{C} \quad (z^2 + z + 1 \neq 0)$.
- La négation de $\forall x \in \mathbb{R} \quad (x + 1 \in \mathbb{Z})$ est $\exists x \in \mathbb{R} \quad (x + 1 \notin \mathbb{Z})$.
- Ce n'est pas plus difficile d'écrire la négation de phrases complexes. Pour l'assertion :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y > 0 \quad (x + y > 10)$$

sa négation est

$$\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y > 0 \quad (x + y \leq 10).$$

Exercice

Ecrire avec des quantificateurs les propositions suivantes :

- 1) f n'est pas nulle (où f est une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R}).
- 2) Le dénominateur D de la fraction ne s'annule pas sur \mathbb{R} .
- 3) f n'est pas l'identité de \mathbb{R} (où f est une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R}).
- 4) f n'est pas croissante sur \mathbb{R} (où f est une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R}).

Solution

- 1) $\exists x \in \mathbb{R} / f(x) \neq 0$.
- 2) $\forall x \in \mathbb{R}, D(x) \neq 0$. Vous constaterez que les phrases « le dénominateur ne s'annule pas » et « le dénominateur n'est pas nul » n'ont pas du tout la même signification.
- 3) $\exists x \in \mathbb{R} / f(x) \neq x$.
- 4) $\exists(a, b) \in \mathbb{R}^2 / (a \leq b \text{ et } f(a) > f(b))$. Ici, il a fallu nier l'implication $(a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b))$.

Exemple : une fonction f est continue en un réel x_0 :

$$f \text{ est continue en } x_0 \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \forall x \in D_f, (|x - x_0| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon)).$$

Si on veut écrire la définition de : « f n'est pas continue en x_0 », il faut écrire la négation de la phrase précédente. Il faut donc nier les quantificateurs, mais aussi nier les implications. Nous rappelons que la négation de $P \Rightarrow Q$ est $P \wedge \overline{Q}$ et que la négation de \leq est $>$. D'autre part, la négation de $\forall \varepsilon > 0, \dots$ est $\exists \varepsilon > 0 \dots$ et non pas $\exists \varepsilon \leq 0 / \dots$

$$f \text{ n'est pas continue en } x_0 \Leftrightarrow (\exists \varepsilon > 0 / \forall \alpha > 0, \exists x \in D_f / \underbrace{(|x - x_0| \leq \alpha)}_P \text{ et } \underbrace{|f(x) - f(x_0)| > \varepsilon}_Q).$$

La distribution des quantificateurs

Passons maintenant aux rapports qu'entretiennent les quantificateurs \forall et \exists avec les connecteurs logiques *et* et *ou*.

Théorème : Soient E un ensemble et $P(x)$ et $Q(x)$ deux propositions.

$$\textcircled{1} (\forall x \in E, P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow ((\forall x \in E / P(x)) \wedge (\forall x \in E, Q(x))).$$

$$\textcircled{2} (\forall x \in E, P(x) \vee Q(x)) \begin{array}{l} \not\Rightarrow \\ \leftarrow \end{array} ((\forall x \in E / P(x)) \vee (\forall x \in E, Q(x))).$$

$$\textcircled{3} (\exists x \in E, P(x) \wedge Q(x)) \begin{array}{l} \Rightarrow \\ \not\Leftarrow \end{array} ((\exists x \in E, P(x)) \wedge (\exists x \in E, Q(x))).$$

$$\textcircled{4} (\exists x \in E, P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow ((\exists x \in E, P(x)) \vee (\exists x \in E, Q(x))).$$

Dans $\textcircled{2}$ et $\textcircled{3}$, on ne trouve pas d'équivalence mais seulement une implication. Pour le comprendre, commençons par analyser le langage courant. La phrase « dans la classe, il existe une personne qui est un garçon et une autre personne qui est une fille » est vraie mais une même personne ne peut jouer les deux rôles à la fois ou encore la phrase « il existe un élève qui est un garçon et une fille » est fausse. De même, la phrase « dans la classe, tout élève est un garçon ou une fille » est vraie mais la phrase « dans la classe, tout élève est un garçon ou tout élève est une fille » est fausse.

Étudions un exemple « plus mathématique », et pour cela, considérons les deux propositions

$$(\exists x \in \mathbb{R} / \cos x = 0) \text{ et } (\exists x \in \mathbb{R} / \sin x = 0),$$

et

$$(\exists x \in \mathbb{R} / \cos x = 0 \text{ et } \sin x = 0).$$

La première proposition est vraie car 0 est un réel x tel que $\sin x = 0$ et $\frac{\pi}{2}$ est un réel x tel que $\cos x = 0$. Ainsi, dans les deux affirmations $(\exists x \in \mathbb{R} / \cos x = 0)$ et $(\exists x \in \mathbb{R} / \sin x = 0)$, la lettre x utilisée deux fois **ne désigne pas forcément un même nombre**. La deuxième proposition est clairement fausse (car par exemple $\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \neq 0$).

Pour comprendre vraiment la phrase $(\exists x \in \mathbb{R} / \cos x = 0)$ et $(\exists x \in \mathbb{R} / \sin x = 0)$, il suffit d'être plus explicite : $(\exists x_1 \in \mathbb{R} / \cos x_1 = 0)$ et $(\exists x_2 \in \mathbb{R} / \sin x_2 = 0)$.

Étudions un autre exemple. On rappelle qu'une fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} est monotone si et seulement si elle est croissante ou décroissante sur \mathbb{R} . Ceci s'écrit avec des quantificateurs :

$$(\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, (a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b))) \text{ ou } (\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, (a \leq b \Rightarrow f(a) \geq f(b))),$$

et ne s'écrit sûrement pas

$$(\forall(a, b) \in \mathbb{R}^2, (a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b) \text{ ou } f(a) \geq f(b))),$$

cette deuxième phrase étant, elle, vérifiée par toute fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On ne peut donc pas « distribuer \forall sur le mot *ou* ».

Encore un exemple. On considère deux fonctions f et g de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On suppose que $f \times g = 0$. Peut-on affirmer que l'on a $f = 0$ ou $g = 0$? La réponse est non. Il suffit de considérer deux fonctions non nulles f et g telles que, à chaque fois que f ne s'annule pas, ce soit g qui s'annule. Par exemple, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases} \quad x \mapsto \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

fonctions f et g , si x est un réel élément de $] -\infty, 0[$, $f(x)g(x) = 0 \times x = 0$ et si x est un réel élément de $[0, +\infty[$, $f(x)g(x) = x \times 0 = 0$.

Revenons à des fonctions quelconques f et g et exprimons ce qui précède avec des quantificateurs.

$$f g = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(x)g(x) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (f(x) = 0 \text{ ou } g(x) = 0) \text{ (I)},$$

alors que

$$f = 0 \text{ ou } g = 0 \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0) \text{ ou } (\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 0) \text{ (II)}.$$

Les propositions (I) et (II) ne sont pas les mêmes et encore une fois, on ne peut donc pas distribuer \forall sur le mot *ou*. Dans la phrase (I), « le mot *ou* est une fonction de x » et en faisant varier x , c'est tantôt $f(x)$ qui peut être nul et tantôt $g(x)$. Ce n'est pas le cas dans la phrase (II).

On peut distribuer \forall sur « et » et \exists sur « ou »
mais on ne peut pas distribuer \forall sur « ou » et \exists sur « et ».

Exercice

Ecrire avec des quantificateurs les propositions suivantes :

- 1) a) Tout entier naturel est pair ou impair.
b) Tout entier naturel est pair ou tout entier naturel est impair.
- 2) a) f est strictement monotone sur \mathbb{R} (où f désigne une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R}).
b) f n'est pas strictement monotone sur \mathbb{R} .

Solution

- 1) a) $\forall n \in \mathbb{N}, (n \text{ est pair ou } n \text{ est impair}).$
b) $(\forall n \in \mathbb{N}, n \text{ est pair}) \text{ ou } (\forall n \in \mathbb{N}, n \text{ est impair}).$
- 2) a) $(\forall(a, b) \in \mathbb{R}^2, (a < b \Rightarrow f(a) < f(b))) \text{ ou } (\forall(a, b) \in \mathbb{R}^2, (a < b \Rightarrow f(a) > f(b))).$

b) $(\exists(a, b) \in \mathbb{R}^2 / (a < b \text{ et } f(a) \geq f(b)))$ et $(\exists(a, b) \in \mathbb{R}^2 / (a < b \text{ et } f(a) \leq f(b)))$.

La permutation des quantificateurs

L'ordre des quantificateurs est très important. Voici une phrase vraie : "Pour toute personne, il existe un numéro de téléphone". Bien sûr le numéro dépend de la personne. Par contre cette phrase est fautive : Il existe un numéro, pour toutes les personnes. Ce serait le même numéro pour tout le monde !

Un autre exemple :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad (x + y > 0) \quad \text{et} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (x + y > 0).$$

sont différentes. La première est vraie, la seconde est fautive. En effet une phrase logique se lit de gauche à droite, ainsi la première phrase affirme *Pour tout réel x , il existe un réel y (qui peut donc dépendre de x) tel que $x + y > 0$.* (par exemple on peut prendre $y = x + 1$). C'est donc une phrase vraie. Par contre la deuxième se lit : *Il existe un réel y , tel que pour tout réel x , $x + y > 0$.* Cette phrase est fautive, cela ne peut pas être le même y qui convient pour tous les x !

Théorème

- ❶ $((\forall x \in E), (\forall y \in E), P(x, y)) \Leftrightarrow ((\forall y \in E), (\forall x \in E), P(x, y))$.
- ❷ $((\exists x \in E), (\exists y \in E), P(x, y)) \Leftrightarrow ((\exists y \in E), (\exists x \in E), P(x, y))$.

On peut permuter des quantificateurs de même nature.

Théorème $((\exists x \in E) / (\forall y \in E, P(x, y))) \Rightarrow (\forall y \in E, \exists x \in E / P(x, y))$
 \nLeftarrow

on ne peut pas permuter des quantificateurs de natures différentes.

Quand on écrit $\exists x / \forall y$ l'élément x est fourni une bonne fois **avant** les y et est donc **constant** quand y varie. Quand on écrit $\forall y, \exists x$ l'élément x est fourni **après** chaque y . Il dépend de y et **peut donc varier** quand y varie.

Exercice

Ecrire avec des quantificateurs les propositions suivantes :

1) a) f est constante sur \mathbb{R} (où f est une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R}).

b) f n'est pas constante sur \mathbb{R} .

2) a) Pour chaque entier, on peut trouver un entier strictement plus grand (cette affirmation est vraie).

b) Il y a un entier plus grand que tous les entiers (cette affirmation est fausse).

Solution

1) a) $\exists C \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = C$, ou encore plus simplement, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(0)$.

Attention, $\forall x \in \mathbb{R}, \exists C \in \mathbb{R} / f(x) = C$ veut dire tout à fait autre chose !

b) $\forall C \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} / f(x) \neq C$, ou encore plus simplement, $\exists x \in \mathbb{R} / f(x) \neq f(0)$.

2) a) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N} / m > n$.

b) $\exists m \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, m > n$.

1.2.3 Exercices

1- Ecrire les phrases suivantes à l'aide de quantificateurs :

- Pour tout entier x , il existe un entier y tel que, pour tout entier z , la relation $z < x$ implique le relation $z < x + 1$
- La fonction f est croissante
- La fonction f est croissante et positive
- Il y a une valeur pour laquelle la fonction f prend une valeur négative
- f ne prend jamais deux fois la même valeur
- f atteint toutes les valeurs de \mathbb{N}
- la fonction f n'est pas inférieure à la fonction g

2- Donner la négation des énoncés suivants :

- $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad (|x - 7/5| < \alpha \Rightarrow |5x - 7| < \epsilon)$.
- $(\forall x)(\exists n)(x \leq n)$.

- $(\exists M)/(\forall n)(|u_n| \leq M)$.
- $(\forall x)(\forall y)(xy = yx)$.
- $(\forall x)(\exists y)(yxy^{-1} = x)$.
- $(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})/(\forall n \geq N)(|u_n| < \epsilon)$.
- $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall \epsilon > 0)(\exists \alpha > 0)/(\forall f \in \mathcal{F})(\forall y \in \mathbb{R})(|x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon)$.

3- Soient les quatre assertions suivantes :

$$(a) \exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0 \quad ; \quad (b) \forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0 ;$$

$$(c) \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0 \quad ; \quad (d) \exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad y^2 > x.$$

1. Les assertions a, b, c, d sont-elles vraies ou fausses ?
2. Donner leur négation.

4- Les phrases suivantes sont-elles équivalentes ?

1. « $\forall x \in \mathbb{R}, (f(x) = 0 \text{ et } g(x) = 0)$ » et « $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0) \text{ et } (\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 0)$ ».
2. « $\forall x \in \mathbb{R}, (f(x) = 0 \text{ ou } g(x) = 0)$ » et « $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0) \text{ ou } (\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 0)$ ».

1.3 Les grands types de raisonnement

Voici des méthodes classiques de raisonnements.

1.3.1 Raisonnement direct

On veut montrer que l'assertion $P \Rightarrow Q$ est vraie. On suppose que P est vraie et on montre qu'alors Q est vraie. C'est la méthode à laquelle vous êtes le plus habitué.

Attention : si la proposition $P \Rightarrow Q$ est vraie, cela ne veut PAS dire que Q est vraie ! Pour que Q soit vraie, il faut montrer que $P \Rightarrow Q$ est vraie, ET que P est vraie.

EXEMPLE 1 Montrer que si $a, b \in \mathbb{Q}$ alors $a + b \in \mathbb{Q}$.

PREUVE 1 Prenons $a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}$. Rappelons que les rationnels \mathbb{Q} sont l'ensemble des réels s'écrivant $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

Alors $a = \frac{p}{q}$ pour un certain $p \in \mathbb{Z}$ et un certain $q \in \mathbb{N}^*$. De même $b = \frac{p'}{q'}$ avec $p' \in \mathbb{Z}$ et $q' \in \mathbb{N}^*$. Maintenant

$$a + b = \frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{pq' + qp'}{qq'}.$$

Or le numérateur $pq' + qp'$ est bien un élément de \mathbb{Z} ; le dénominateur qq' est lui un élément de \mathbb{N}^* . Donc $a + b$ s'écrit bien de la forme $a + b = \frac{p''}{q''}$ avec $p'' \in \mathbb{Z}$, $q'' \in \mathbb{N}^*$. Ainsi $a + b \in \mathbb{Q}$.

1.3.2 Cas par cas

Si l'on souhaite vérifier une assertion $P(x)$ pour tous les x dans un ensemble E , on montre l'assertion pour les x dans une partie A de E , puis pour les x n'appartenant pas à A . C'est la méthode de *disjonction* ou du *cas par cas*.

EXEMPLE 2 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x - 1| \leq x^2 - x + 1$.

PREUVE 2 Soit $x \in \mathbb{R}$. Nous distinguons deux cas.

Premier cas : $x \geq 1$. Alors $|x - 1| = x - 1$. Calculons alors $x^2 - x + 1 - |x - 1|$.

$$\begin{aligned} x^2 - x + 1 - |x - 1| &= x^2 - x + 1 - (x - 1) \\ &= x^2 - 2x + 2 \\ &= (x - 1)^2 + 1 \geq 0. \end{aligned}$$

Ainsi $x^2 - x + 1 - |x - 1| \geq 0$ et donc $x^2 - x + 1 \geq |x - 1|$.

Deuxième cas : $x < 1$. Alors $|x - 1| = -(x - 1)$. Nous obtenons $x^2 - x + 1 - |x - 1| = x^2 - x + 1 + (x - 1) = x^2 \geq 0$. Et donc $x^2 - x + 1 \geq |x - 1|$.

Conclusion. Dans tous les cas $|x - 1| \leq x^2 - x + 1$.

1.3.3 Contraposée

Le raisonnement par *contraposition* est basé sur l'équivalence suivante :

L'assertion $P \implies Q$ est équivalente à $\overline{Q} \implies \overline{P}$.

Donc si l'on souhaite montrer l'assertion $P \implies Q$, on peut (il est suffisant de) montrer que si \overline{Q} est vraie alors \overline{P} est vraie. Ceci peut se révéler très pratique car parfois l'implication $\overline{Q} \implies \overline{P}$ est plus simple.

EXEMPLE 3 Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si n^2 est pair alors n est pair.

PREUVE 3 Montrer l'implication directe n'est pas facile. Nous supposons que n n'est pas pair. Nous voulons montrer qu'alors n^2 n'est pas pair. Comme n n'est pas pair, il est impair et donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$. Alors $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2\ell + 1$ avec $\ell = 2k^2 + 2k \in \mathbb{N}$. Et donc n^2 est impair.

Conclusion : nous avons montré que si n est impair alors n^2 est impair. Par contraposition ceci est équivalent à : si n^2 est pair alors n est pair.

1.3.4 Absurde

Le raisonnement par l'absurde pour montrer $P \implies Q$ repose sur le principe suivant : on suppose à la fois que P est vraie et que Q est fausse et on cherche une contradiction. Ainsi si P est vraie alors Q doit être vraie et donc $P \implies Q$ est vraie.

En termes logiques, la proposition " $P \implies Q$ est vrai" est équivalente à " $\overline{P \implies Q}$ est faux". Or " $\overline{P \implies Q}$ " est équivalent à " $P \wedge \overline{Q}$ ".

L'assertion " $P \implies Q$ est vrai" est équivalente à " $P \wedge \overline{Q}$ est faux".

EXEMPLE 4 Soient $a, b \geq 0$. Montrer que si $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ alors $a = b$.

PREUVE 4 Nous raisonnons par l'absurde en supposant que $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ **et** $a \neq b$. Comme $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ alors $a(1+a) = b(1+b)$ donc $a + a^2 = b + b^2$ d'où $a^2 - b^2 = b - a$. Cela conduit à $(a-b)(a+b) = -(a-b)$. Comme $a \neq b$ alors $a-b \neq 0$ et donc en divisant par $a-b$ on obtient $a+b = -1$. La somme de deux nombres positifs ne peut être négative. Nous obtenons une contradiction. Conclusion : soit $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ est faux, soit c'est vrai et dans ce cas, forcément, $a = b$.

Dans la pratique, on peut choisir indifféremment entre un raisonnement par contraposition ou par l'absurde. Attention cependant de bien écrire quel type de raisonnement vous choisissez et surtout de ne pas changer en cours de rédaction !

1.3.5 Contre-exemple

Si l'on veut montrer qu'une assertion du type $\forall x \in E \ P(x)$ est vraie alors pour chaque x de E il faut montrer que $P(x)$ est vraie. Par contre pour montrer que cette assertion est fausse alors il suffit de trouver $x \in E$ tel que $P(x)$ soit fausse. (Rappelez-vous la négation de $\forall x \in E \ P(x)$ est $\exists x \in E \ \overline{P(x)}$). Trouver un tel x c'est trouver un *contre-exemple* à l'assertion $\forall x \in E \ P(x)$.

EXEMPLE 5 Montrer que l'assertion suivante est fausse "Tout entier positif est somme de trois carrés".

(Les carrés sont les $0^2, 1^2, 2^2, 3^2, \dots$. Par exemple $6 = 2^2 + 1^2 + 1^2$.)

PREUVE 5 Un contre-exemple est 7 : les carrés inférieurs à 7 sont 0, 1, 4 mais avec trois de ces nombres on ne peut faire 7.

1.3.6 Récurrence

Le *principe de récurrence* permet de montrer qu'une assertion $P(n)$, dépendant de n , est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. La démonstration par récurrence se déroule en trois étapes : lors de l'**initialisation** on prouve $P(0)$. Pour l'étape d'**hérédité**, on suppose $n \geq 0$ donné avec $P(n)$ vraie, et on démontre alors que l'assertion $P(n+1)$ au rang suivant est vraie. Enfin dans la **conclusion**, on rappelle que par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On montre donc " $P(0)$ vrai" et " $\forall n, P(n) \implies P(n+1)$ vrai".
Dans ce cas, $P(0) \implies P(1) \implies P(2) \implies \dots \implies P(n) \implies \dots$

EXEMPLE 6 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n > n$.

PREUVE 6 Pour $n \geq 0$, notons $P(n)$ l'assertion suivante :

$$2^n > n.$$

Nous allons démontrer par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$.

Initialisation. Pour $n = 0$ nous avons $2^0 = 1 > 0$. Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Fixons $n \geq 0$. Supposons que $P(n)$ soit vraie. Nous allons montrer que $P(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &= 2^n + 2^n \\ &> n + 2^n \quad \text{car par } P(n) \text{ nous savons } 2^n > n, \\ &> n + 1 \quad \text{car } 2^n \geq 1. \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$, c'est-à-dire $2^n > n$ pour tout $n \geq 0$.

Remarque : Si on doit démontrer qu'une propriété est vraie pour tout $n \geq n_0$, alors on commence l'initialisation au rang n_0 .

Exercices

1. (Raisonnement direct) Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$. Montrer que si $a \leq b$ alors $a \leq \frac{a+b}{2} \leq b$ et $a \leq \sqrt{ab} \leq b$.
2. (Cas par cas) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)$ est divisible par 2 (distinguer les n pairs des n impairs).

3. (Contraposée ou absurde) Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. Montrer que si $b \neq 0$ alors $a + b\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. (On utilisera que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.)
4. (Absurde) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\sqrt{n^2 + 1}$ n'est pas un entier.
5. (Contre-exemple) Est-ce que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x < 2 \implies x^2 < 4$?
6. (Récurrence) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
7. (Récurrence) Fixons un réel $x \geq 0$. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $(1+x)^n \geq 1+nx$.

Chapitre 2

Bases mathématiques

2.1 suites, convergence

2.1.1 suites réelles

Dans cette section, on considère uniquement des suites réelles, indexées par les entiers naturels. Génériquement, on notera $(x_n)_n$ une telle suite.

DEFINITION 1 (Limite d'une suite) soit $l \in \mathbb{R}$. On dira que l est la limite de la suite $(x_n)_n$ si on a la propriété suivante :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } |x_n - l| < \epsilon \forall n \geq N. \quad (2.1)$$

On écrira alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = l.$$

On dit généralement que $(x_n)_n$ converge vers l ou que $(x_n)_n$ tend vers l . Dit autrement, $(x_n)_n$ converge vers l si, pour tout $\epsilon > 0$, tous les termes de la suite $(x_n)_n$ sont ϵ -proches de l , à partir d'un certain rang N .

EXEMPLE 1

a) Soit $x_n = 1/n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. On veut montrer que $\lim_n x_n = 0$. Pour cela nous n'avons à notre disposition seulement la définition de limite donnée ci-dessus. Il faut donc montrer que pour n'importe quel $\epsilon > 0$, on peut trouver un $N \in \mathbb{N}$ tel que $-\epsilon < x_n < \epsilon$ pour tout $n \geq N$. On pose $N = [1/\epsilon] + 1$. On a alors, pour $n \geq N$, $n > 1/\epsilon$, et donc $1/n < \epsilon$. Puisque $1/n$ est strictement positif, on a donc

$$-\epsilon < 0 < 1/n < \epsilon, \forall n \geq N.$$

b) Soit $x_n = (-1)^n$. On veut montrer que x_n ne converge pas. On doit donc montrer la négation de (2.1) :

$$\exists \epsilon > 0 \text{ tel que } \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N : |x_n - l| > \epsilon. \quad (2.2)$$

Soit $l \geq 0$. On prend $\epsilon = 1/2$. Pour n impair, on a $|x_n - l| = l + 1 > \epsilon$.

Soit maintenant $l < 0$. On prend $\epsilon = 1/2$. Pour n pair, on a $|x_n - l| = 1 - l > \epsilon$.

c) Soit $x_n = \frac{n}{2}(1 - (-1)^n)$. On veut montrer que $(x_n)_n$ n'est pas convergente. Regardons les premiers termes de la suite : $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{3}{2}(1 + 1) = 3$, $x_4 = 0$, $x_5 = 5$ etc... On peut réécrire la définition de (x_n) de manière différente :

$$x_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ n & \text{sinon.} \end{cases}$$

(Montrez le !)

Pour cette suite on a donc la propriété suivante :

$$\forall \epsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N \text{ tel que } |x_n - 0| < \epsilon.$$

(il suffit de prendre $n \geq N$ pair). Cependant, cela ne signifie pas que $\lim_n x_n = 0$. Cela signifie que pour tout $\epsilon > 0$, il existe une infinité de termes de la suite $(x_n)_n$ qui sont ϵ -proches de 0. Montrons maintenant que (x_n) ne converge pas.

Soit $l \in \mathbb{R}$. Supposons d'abord que $l = 0$ et prenons $\epsilon = 1$. On a $|x_n| = n$ pour n impair donc, pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe $n > N$ (impair) tel que $|x_n| = n > 1$. Donc $(x_n)_n$ ne converge pas vers 0.

Supposons maintenant que $l \neq 0$ et prenons $\epsilon = |l|/2$. Pour tout n pair on a $|x_n - l| = |l| > \epsilon$ donc est vérifié et $(x_n)_n$ ne converge pas vers l .

THEOREM 1 Soit $(x_n)_n$ une suite de nombres réels. Alors $(x_n)_n$ a **au plus** une limite.

Preuve (par l'absurde (voir section 1.3.4)).

Supposons par contradiction que $(x_n)_n$ admet deux limites distinctes : $l_1 < l_2$. Puisque $l_1 < l_2$, il existe $\epsilon > 0$ tel que $l_2 > l_1 + 3\epsilon$. Par définition d'une limite, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ et $N_2 \in \mathbb{N}$ tels que

$$|x_n - l_1| < \epsilon, \forall n \geq N_1 \text{ et } |x_n - l_2| < \epsilon, \forall n \geq N_2.$$

On note $N = \max\{N_1, N_2\}$. On a alors, pour tout $n \geq N$,

$$l_1 + \epsilon \geq x_n \geq l_2 - \epsilon \geq l_1 + 2\epsilon.$$

On aboutit donc à une contradiction. ■

Remarque : Nous avons supposé qu'une suite admet deux limites distinctes. Nous avons alors appliqué la définition aux deux limites, et avons trouvé un $\epsilon > 0$ pour lequel apparaît une contradiction. Or la définition nous dit que si une suite converge, la propriété doit être vraie pour **toutes** les valeurs de $\epsilon > 0$. Il a donc suffit d'en exhiber un pour lequel ça ne marche pas.

THEOREM 2 Soient $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ deux suites réelles convergeant respectivement vers l et l' . Alors, si $x_n \leq y_n$ pour tout n , on a $l \leq l'$.

Preuve (par contraposée (voir section 1.3.3)).

Supposons par contradiction que $l' < l$. Alors, si on fixe ϵ tel que $l' < l - 2\epsilon$, il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, on a

$$x_n > l - \epsilon > l' + \epsilon > y_n,$$

et on aboutit à une contradiction. ■

Remarque : On a montré que $(\forall n, A(n)) \implies B$, en utilisant la contraposée : $\overline{B} \implies \exists n, \overline{A(n)}$ (La proposition \overline{B} est " $l' < l$ " et $\overline{A(n)}$ est " $x_n > y_n$ ").

La proposition suivante peut s'avérer très pratique :

PROPOSITION 1 Si $x_n \leq y_n \leq z_n$ pour tout entier n et si les suites $(x_n)_n$ et $(z_n)_n$ convergent vers la même limite l , alors $(y_n)_n$ converge également vers l .

Preuve. (par retour à la définition).

Soit $\epsilon > 0$; Il existe N_1 tel que pour tout $n \geq N_1$, on a $l - \epsilon < x_n$. De même, il existe N_2 tel que, si $n \geq N_2$, on a $z_n < l + \epsilon$. Ainsi, si $n \geq N := \max\{N_1, N_2\}$, on a

$$l - \epsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < l + \epsilon,$$

ce qui signifie que

$$|y_n - l| < \epsilon$$

pour tout $n \geq N$. Le résultat est prouvé. ■

COROLLARY 1 Si $(x_n)_n$ est une suite positive ou nulle telle que $x_n \leq y_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors, si $(y_n)_n$ converge vers 0, $(x_n)_n$ également.

(écrivez la démonstration)

THEOREM 3 (Propriétés algébriques) Soient $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ deux suites réelles, admettant respectivement les limites l et l' . Alors la suite $(x_n + y_n)_n$ converge vers $l + l'$ et la suite $(x_n y_n)_n$ converge vers ll' .

Preuve. (par raisonnement direct).

Commençons par prouver la première propriété. Soit $\epsilon > 0$. Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N_1$, on a

$$|x_n - l| < \epsilon/2.$$

De plus, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N_2$,

$$|y_n - l'| < \epsilon/2$$

Par l'inégalité triangulaire : $|a + b| \leq |a| + |b|$, on a

$$|(x_n + y_n) - (l + l')| \leq |x_n - l| + |y_n - l'| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon, \forall n \geq N := \max\{N_1, N_2\}.$$

Le premier point est prouvé.

Pour le second point, soit $1 > \epsilon > 0$. On a

$$x_n y_n - ll' = l(y_n - l') + l'(x_n - l) + (x_n - l)(y_n - l').$$

Ainsi

$$\begin{aligned} |x_n y_n - ll'| &\leq |l(y_n - l')| + |l'(x_n - l)| + |(x_n - l)(y_n - l')| \\ &\leq |l||y_n - l'| + |l'||x_n - l| + |x_n - l||y_n - l'| \end{aligned}$$

Puisque $(x_n)_n$ converge vers l , il existe N_1 entier tel que, pour tout $n \geq N_1$, on a

$$|x_n - l| \leq \frac{\epsilon}{3(|l'| + 1)}.$$

De même, il existe N_2 entier tel que, pour tout $n \geq N_2$, on a

$$|y_n - l'| \leq \frac{\epsilon}{3(|l| + 1)}.$$

Ainsi, pour $n \geq \max\{N_1, N_2\}$,

$$|x_n y_n - ll'| \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon^2}{9} \leq \epsilon$$

On a prouvé que $(x_n y_n)_n$ converge vers ll' . ■

Rappelons la définition de la continuité d'une fonction réelle :

DEFINITION 2 Une fonction réelle f est continue en $x \in \mathbb{R}$ si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } |y - x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \epsilon.$$

La négation de cette proposition s'écrit ainsi :

$$\exists \epsilon > 0, \forall \delta > 0 \exists y \text{ tel que } |y - x| < \delta \text{ et } |f(y) - f(x)| \geq \epsilon,$$

ce qui est équivalent à

$$\exists \epsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \text{ tel que } |x_n - x| < 1/n \text{ et } |f(x_n) - f(x)| \geq \epsilon.$$

Cela signifie qu'il existe une suite $(x_n)_n$ qui converge vers x et telle que $(f(x_n))_n$ ne converge pas vers $f(x)$. On a donc la proposition suivante, qui traduit la continuité d'une fonction réelle en un point x en termes de suites convergentes :

PROPOSITION 2 Soit f une fonction réelle et $x \in \mathbb{R}$. Alors f est continue au point x ssi pour toute suite $(x_n)_n$ convergeant vers x , on a $\lim_n f(x_n) = f(x)$.²

1. Remarquez qu'on prend $(|l'| + 1)$ et non pas $|l'|$ car l' pourrait tout à fait être 0

2. On peut définir la continuité d'une fonction en un point comme dans la proposition ci-dessus, ce qui est plus "parlant" que la définition formelle en termes d' ϵ et de δ .

Preuve. (inclure dessin) Commençons par la condition suffisante. Supposons que pour toute suite $(x_n)_n$ convergeant vers x , on a $\lim_n f(x_n) = f(x)$. Si f n'est pas continue en x , alors il existe $\epsilon > 0$ tel que $\forall \delta > 0, \exists y$ tel que $|y - x| < \delta$ et pourtant $|f(y) - f(x)| \geq \epsilon$.

Soit $\delta = 1/n$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un y_n tel que $|y_n - x| < \delta$, et $|f(y_n) - f(x)| \geq \epsilon$. On a donc défini une suite $(y_n)_n$, avec y_n converge vers x et pourtant $\lim_n f(y_n) \neq f(x)$. On aboutit à une contradiction.

Montrons l'implication inverse. Supposons que f soit continue en x , et soit $(x_n)_n$ une suite qui converge vers x . Fixons un $\epsilon > 0$. Alors, par continuité de f en x , $\exists \delta > 0$ tel que pour tout y tel que $|y - x| < \delta$, on a $|f(y) - f(x)| < \epsilon$. Mais puisque x_n converge vers x , par définition, pour tout $\delta > 0, \exists N, n \geq N \implies |x_n - x| < \delta$. Par conséquent, $|f(x_n) - f(x)| < \epsilon, \forall n \geq N$. Puisque ϵ a été fixé arbitrairement, c'est forcément que $\lim_n f(x_n) = f(x)$. ■

L'utilisation de l'implication directe de cette proposition s'appelle passage à la limite.

DEFINITION 3 Soit $(x_n)_n$ une suite réelle.

- 1) On dit que $(x_n)_n$ est majorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $x_n \leq M, \forall n$;
- 2) on dit que $(x_n)_n$ est minorée s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $x_n \geq m, \forall n$;
- 3) enfin on dit que $(x_n)_n$ est bornée si elle est majorée et minorée.

EXEMPLE 2 Si $x_n = n, (x_n)_n$ est minorée, mais pas majorée; si $x_n = 1/n, (x_n)_n$ est bornée; si $x_n = -n, (x_n)_n$ est majorée, mais pas minorée.

Nous avons besoin de la notion de borne supérieure (resp. inférieure) dans la suite du cours. Soit A un sous-ensemble de \mathbb{R} . Si A est majoré, alors il admet un plus petit majorant. Plus précisément

PROPOSITION 3 Soit $A \subset \mathbb{R}$. Si A est majoré, alors A admet une borne supérieure $\sup A$, qui est l'unique nombre réel vérifiant :

- (i) $\sup A \geq x, \text{ pour tout } x \in A$; ($\sup A$ est un majorant de A)
- (ii) si M est un majorant de A , alors $M \geq \sup A$ (il n'existe pas de majorant de A plus petit que $\sup A$)

Par exemple soit $A = \{1 - 1/n, n \in \mathbb{N}^*\} = \{0, 1/2, 2/3, 3/4, \dots\}$. A est majoré par exemple par 1, 2 ou 3. Le plus petit des majorants est 1 (donc $\sup A = 1$). En effet, soit $M < 1$. Alors pour $n > 1/(1 - M)$, on a $1 - 1/n > M$ et donc M n'est pas un majorant de A . Remarquez bien dans cet exemple que $\sup A \notin A$.

THEOREM 4 Soit $(x_n)_n$ une suite réelle.

- 1) Si $(x_n)_n$ est croissante et majorée alors $(x_n)_n$ est convergente;
- 2) si $(x_n)_n$ est décroissante et minorée alors elle est convergente.

Preuve. (par retour à la définition).

On prouve uniquement le point 1) ; le point 2) est similaire. La suite $(x_n)_n$ étant majorée, l'ensemble $A := \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ admet une borne supérieure l . Montrons que $(x_n)_n$ converge vers l . Par définition, l est le plus petit des majorants de l'ensemble A donc, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un élément de A qui est supérieur à $l - \epsilon$ (sinon $l - \epsilon$ serait un majorant de A , ce qui n'est pas possible par définition de l). Par conséquent, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_{n_0} \geq l - \epsilon$. Mais la suite $(x_n)_n$ est croissante donc, pour tout $n \geq n_0$,

$$l \geq x_n \geq x_{n_0} \geq l - \epsilon.$$

Ceci prouve que $(x_n)_n$ converge vers l . ■

2.1.2 suites vectorielles

Une suite vectorielle de \mathbb{R}^d est une suite $(x_n)_n$ où $x_n = (x_n^1, \dots, x_n^d)$. Par exemple, dans \mathbb{R}^3 , $(x_n)_n = (1/n, 1/n^2, n+2)$ est une suite vectorielle. Dans la section précédente sur les suites réelles, nous avons souvent utilisé la valeur absolue ($|\cdot|$) comme mesure de la distance entre deux points de \mathbb{R} . Cela était nécessaire pour définir par exemple la notion de convergence : l'expression " $|x_n - x| < \epsilon$ " signifie que sur la ligne qui représente \mathbb{R} , la distance entre x_n et x est inférieure à ϵ .

Dans ce qui suit, nous aurons également besoin de mesurer des distances entre deux points de \mathbb{R}^d , pour dire s'ils sont proches ou non. Pour dire qu'une suite dans \mathbb{R}^d converge, il faut définir la notion de distance. Nous rappelons ici le concept général de **norme**, puis nous rappelons ce qu'est la **norme euclidienne** car c'est la notion de distance usuelle pour les suites vectorielles.

DEFINITION 4 Une norme sur \mathbb{R}^d est une application \mathcal{N} de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R}_+ qui satisfait les propriétés suivantes :

- (N1) $\mathcal{N}(x) = 0$ implique que $x = 0$;
- (N2) pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $\mathcal{N}(\alpha x) = |\alpha| \mathcal{N}(x)$;
- (N3) pour tout $x, y \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\mathcal{N}(x + y) \leq \mathcal{N}(x) + \mathcal{N}(y).$$

Quelques remarques : - $\mathcal{N}(x)$ est un nombre positif ou nul, qui représente une mesure de la distance entre le point x de \mathbb{R}^d et l'origine de \mathbb{R}^d (notée 0_d). Ce nombre ne peut pas être négatif ;

- Aucun point de \mathbb{R}^d n'est à distance nulle de 0_d à part 0_d lui-même ;

- Dans la 2ème propriété, αx est le produit extérieur : $\alpha x = (\alpha x^1, \dots, \alpha x^d)$. Ainsi, si on multiplie toutes les coordonnées d'un vecteur par le **même** scalaire α , alors on a multiplié la distance du vecteur à l'origine par $|\alpha|$;

- La 3ème propriété est la fameuse **inégalité triangulaire**. Elle exprime l'idée que la distance est une mesure "minimale". En géométrie euclidienne, c'est l'idée que la ligne droite est le plus court chemin entre deux points.

On peut définir autant de normes que l'on peut imaginer, la notion de distance n'étant pas unique.

EXEMPLE 3 Sur \mathbb{R} , l'application $|\cdot|$ est une norme. En effet, elle va de \mathbb{R} dans \mathbb{R}_+ et :

- $|x| = 0$ implique que $x = 0$;
- pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $|\alpha x| = |\alpha||x|$ (par ex. $|-3 * 4| = 3 * |4|$);
- pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a $|x + y| \leq |x| + |y|$ (par ex. $|2 + (-1)| < |2| + |1|$)

Avant de définir la norme euclidienne dans \mathbb{R}^d , nous avons besoin de rappeler la notion de **produit scalaire**. Soient $x, y \in \mathbb{R}^d$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On note $\langle \cdot | \cdot \rangle$ le produit scalaire dans \mathbb{R}^d , défini par

$$\langle x | y \rangle := \sum_{i=1}^d x^i y^i.$$

Rappelons qu'il s'agit d'une application bilinéaire symétrique, définie positive : elle vérifie les 3 propriétés suivantes.

a) **linéarité par rapport à la première composante** : pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $x, x', y \in \mathbb{R}^d$,

$$\langle \alpha x | y \rangle = \alpha \langle x | y \rangle; \langle x + x' | y \rangle = \langle x | y \rangle + \langle x' | y \rangle.$$

b) **symétrie** : pour tout $x, y \in \mathbb{R}^d$,

$$\langle x | y \rangle = \langle y | x \rangle$$

c) **Positivité** : pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\langle x | x \rangle \geq 0;$$

Remarque : La positivité ne dit PAS que $\langle x | y \rangle \geq 0$. En effet, on peut tout à fait avoir $\langle x | y \rangle < 0$.

Exercice : Montrer que la linéarité par rapport à la première composante, associée à la symétrie, induisent la linéarité par rapport à la seconde composante.

Exercice : Montrer que

$$\langle x | x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$$

Le produit scalaire sur \mathbb{R}^d définit la norme euclidienne associée comme suit :

$$\|x\| := \sqrt{\langle x | x \rangle}$$

PROPOSITION 4 La norme euclidienne $\|\cdot\|$ est une norme sur \mathbb{R}^d

Preuve. La première propriété se déduit du fait que le produit scalaire est défini positif et la seconde de la bilinéarité. La troisième se déduit de l'identité :

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x | y \rangle \quad (2.3)$$

et du lemme suivant :

LEMMA 1 (Cauchy-Schwartz) Soient $x, y \in \mathbb{R}^d$. Alors

$$|\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

Preuve de Cauchy-Schwartz et de l'identité (2.3). On commence par montrer C-S. Supposons que $y \neq 0$ (autrement l'inégalité est évidente). Introduisons le polynôme P donné par

$$P(t) = \|x + ty\|^2 = \|x\|^2 + 2t\langle x | y \rangle + t^2\|y\|^2$$

Le discriminant associé est $\Delta = 4\langle x | y \rangle^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2$. Par définition, on a $P(t) \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Ainsi, le discriminant doit être négatif ou nul, ce qui signifie que

$$|\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

et le lemme est prouvé.

On montre maintenant (2.3). Soient $x, y \in \mathbb{R}^d$. On a

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y | x + y \rangle = \langle x | x \rangle + \langle x | y \rangle + \langle y | x \rangle + \langle y | y \rangle \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x | y \rangle, \end{aligned}$$

où la première égalité est une conséquence de la linéarité et la seconde de la symétrie du produit scalaire. ■

On a alors :

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x | y \rangle \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \|y\| \\ &\leq (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

ce qui implique (N3). On a prouvé que $\|\cdot\|$ est une norme (la norme euclidienne). ■

Remarque : Lorsque $d = 1$, la norme euclidienne est la valeur absolue ($\|\cdot\| \equiv |\cdot|$). En effet, $\langle x | x \rangle = x^2$ et $\sqrt{x^2} = |x|$.

Sans précision contraire, on considère maintenant des suites $(x_n)_n$ de \mathbb{R}^d , c'est à dire que le terme général de la suite s'écrit $x_n = (x_n^1, \dots, x_n^d)$, et $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne.

DEFINITION 5 (Boule de \mathbb{R}^d) Soit $x \in \mathbb{R}^d$ et $\epsilon > 0$. La boule de centre x et de rayon ϵ est l'ensemble de vecteur de \mathbb{R}^d suivant :

$$B(x, \epsilon) := \{z \in \mathbb{R}^d : \|z - x\| < \epsilon\}.$$

DEFINITION 6 Une suite $(x_n)_n$ de \mathbb{R}^d converge vers $x = (x^1, \dots, x^d) \in \mathbb{R}^d$ si on a la propriété suivante :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \|x_n - x\| < \epsilon \quad \forall n \geq N.$$

En d'autres termes, x_n converge vers x si, pour tout $\epsilon > 0$, tous les termes de la suite $(x_n)_n$ se trouvent dans la boule centrée en x et de rayon ϵ ($x_n \in B(x, \epsilon)$), à partir d'un certain indice N (qui dépend de ϵ).

EXEMPLE 4 La suite $(x_n)_n = (1/n, 1/n^2, 1/\sqrt{n} + 2)$ dans \mathbb{R}^3 converge vers $(0, 0, 2)$. En effet, soit $\epsilon > 0$, et $N > E(\frac{1}{\epsilon^3})$. Alors pour tout $n \geq N$, on a $x_n^1 < \epsilon^3$, $x_n^2 < \epsilon^6$, et $x_n^3 < 2 + \epsilon^{3/2}$. On peut aisément voir que à partir de N , $\|x_n - x\| < \|(\epsilon^3, \epsilon^6, \epsilon^{3/2})\| < \epsilon$.

Dans l'exemple précédent, on peut remarquer que

$$\|x_n - x\| = \|(1/n, 1/n^2, 1/\sqrt{n})\| = \sqrt{1/n^2 + 1/n^4 + 1/n},$$

et que la suite réelle $y_n = \sqrt{1/n^2 + 1/n^4 + 1/n}$ tend vers 0. De manière générale, on peut considérer la suite $(\|x_n - x\|)_n$ comme une suite réelle. On a alors que $(x_n)_n$ converge vers x si et seulement si la suite réelle de terme général $\|x_n - x\|$ tend vers 0.

PROPOSITION 5 Soit une suite $(x_n)_n$ de \mathbb{R}^d telle que $\|x_n - x\| \leq \alpha_n$, où α_n converge vers 0. Alors $(x_n)_n$ converge vers x .

Preuve. Une conséquence immédiate du corollaire 1 est que la suite réelle $(\|x_n - x\|)_n$ tend vers zéro. ■

Intuitivement, on constate qu'une suite $(x_n)_n$ de \mathbb{R}^d converge vers x si la suite de chacune de ses d composantes converge vers la composante correspondante de x . C'est énoncé formellement dans la proposition suivante.

PROPOSITION 6 Soit $(x_n)_n$ une suite de \mathbb{R}^d . On note $x_n = (x_n^1, \dots, x_n^d)$. Alors $(x_n)_n$ converge vers x ssi, pour $i = 1, \dots, d$, la suite réelle $(x_n^i)_n$ converge vers x^i .

Preuve. Supposons tout d'abord sur $(x_n)_n$ converge vers x . Soit $i \in \{1, \dots, d\}$. On a

$$|x_n^i - x^i|^2 \leq \|x_n - x\|^2.$$

Ainsi, puisque $\lim_n \|x_n - x\| = 0$, on a $\lim_n |x_n^i - x^i| = 0$.

Prouvons maintenant l'autre implication. Supposons que, pour tout $i = 1, \dots, d$, on ait $\lim_n x_n^i = x^i$. Alors cela implique que $\|x_n^i - x^i\|$ tend vers 0, pour tout i . On a

$$\|x_n - x\|^2 = \sum_{i=1}^d (x_n^i - x^i)^2.$$

Le terme de droite est une somme de termes qui tendent tous vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Ainsi $\lim_n \|x_n - x\|^2 = 0$. Par passage à la limite (la fonction racine est continue sur \mathbb{R}^+), $\lim_n \|x_n - x\| = 0$. ■

PROPOSITION 7 (Algèbre) Soient $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ deux suites de \mathbb{R}^d convergent respectivement vers x et y , et $(\lambda_n)_n$ une suite réelle convergent vers λ . Alors

- 1) $(x_n + y_n)_n$ converge vers $x + y$;
- 2) $(\lambda_n x_n)_n$ converge vers λx ;
- 3) la suite $(\|y_n\|)_n$ converge vers $\|y\|$;
- 4) $(\langle x_n | y_n \rangle)_n$ converge vers $\langle x | y \rangle$.

Preuve. La preuve des deux premiers points est très similaire au cas $d = 1$ (section précédente). Pour le troisième point, on remarque que, par l'inégalité triangulaire,

$$\|y_n\| - \|y\| \leq \|y_n - y\|.$$

De même, on a

$$\|y\| - \|y_n\| \leq \|y - y_n\|.$$

Ainsi

$$|\|y_n\| - \|y\|| \leq \|y_n - y\|,$$

et 3) s'en déduit.

Pour ce qui est du dernier point, on a

$$\begin{aligned} |\langle x_n | y_n \rangle - \langle x | y \rangle| &\leq |\langle x_n - x | y_n \rangle| + |\langle x | y_n - y \rangle| \\ &\leq \|x_n - x\| \|y_n\| + \|x\| \|y_n - y\|. \end{aligned}$$

Il suffit de montrer que le terme de droite tend vers 0 et on aura prouvé le point 4). Il suffit pour cela de voir que $(\|y_n\|)_n$ converge vers $\|y\|$ donc le terme de droite converge vers $0 \times \|y\| + \|x\| \times 0 = 0$. ■

DEFINITION 7 Une suite $(x_n)_n$ de \mathbb{R}^d est bornée s'il existe $M > 0$ tel que $\|x_n\| \leq M, \forall n$.

PROPOSITION 8 Soit une suite $(x_n)_n$ de \mathbb{R}^d . Si $(x_n)_n$ converge alors elle est bornée.

Preuve. Voir exercices. ■

Un concept important est celui de suite extraite (ou sous-suite). Soient $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ des entiers naturels et $(x_n)_n$ une suite de \mathbb{R}^d . On note $(x_{n_k})_k$ la suite $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots$. On dira qu'il s'agit d'une suite extraite (ou sous-suite) de $(x_n)_n$.

EXEMPLE 5 Soit $(x_n)_n$ la suite définie par $x_0 = 1, x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = -1, \dots$. En prenant $n_k = 2k$, on peut définir la sous-suite $(x_{2k})_k$, dont les termes successifs sont $1, 1, 1, 1, \dots$

PROPOSITION 9 Si $(x_n)_n$ converge vers une limite x , alors toutes ses sous-suites convergent également vers x .

Preuve. C'est une conséquence immédiate de la définition de limite. Soit une sous-suite $(x_{n_k})_k$. Étant donné $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|x_n - x\| < \epsilon$ pour tout $n \geq N$. Mais dans ce cas, pour tout k tel que $n_k \geq N$, on a également $\|x_{n_k} - x\| < \epsilon$, ce qui conclut la preuve. ■

Néanmoins, en général, plusieurs sous-suites peuvent converger vers des limites différentes. Dans ce cas, la suite initiale n'est pas convergente. Dans l'exemple précédent, la suite $(x_n)_n$ n'est pas convergente. La sous-suite d'indices pairs converge vers 1 et la sous-suite d'indices impairs converge vers -1 .

2.1.3 Exercices

EXERCICE 1 Démontrer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.

- 1) $\lim_n u_n = 0 \iff \lim_n |u_n| = 0$
- 2) $\lim_n u_n = -1 \iff \lim_n |u_n| = 1$
- 3) $\lim_n u_n = -1 \implies \lim_n |u_n| = 1$

EXERCICE 2 Soient u et v deux suites de réels de $[0, 1]$ telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n = 1$. Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers 1.

EXERCICE 3 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de \mathbb{R} . Que pensez-vous des propositions suivantes :

- Si $(u_n)_n$ converge vers un réel ℓ alors $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers ℓ .
- Si $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont convergentes, il en est de même de $(u_n)_n$.
- Si $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont convergentes, de même limite ℓ , il en est de même de $(u_n)_n$.

EXERCICE 4 (***) Soit $(x_n)_n$ une suite réelle On note

$$\bar{x}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

- 1) On suppose que $(x_n)_n$ converge vers $x \in \mathbb{R}$.
 - a) Soit $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, on a

$$|\bar{x}_n - x| \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N |x_i - x| + \frac{n - N}{n} \frac{\epsilon}{2}.$$

- b) Montrer que la suite de terme général \bar{x}_n converge vers x .
- 2) Montrer que si la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, la suite $(\bar{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Réciproque ?
- 3) Montrer que si la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante alors la suite $(\bar{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'est aussi.

EXERCICE 5 Soit $(x_n)_n$ une suite bornée de \mathbb{R}^d et $(y_n)_n$ une suite réelle qui converge vers 0. Montrer que la suite de terme général $y_n x_n$ converge vers 0 (indication : majorer $\|y_n x_n\|$ par une quantité qui ne dépend que de y_n).

EXERCICE 6 (*) Soit $(x_n)_n$ une suite de \mathbb{R}^d convergeant vers x . Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$,

$$\|x_n\| \leq \|x\| + 1.$$

En déduire que $(x_n)_n$ est bornée.

EXERCICE 7 (**) Soit $(x_n)_n$ une suite de \mathbb{R}^d . On dira que $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|x_n - x_m\| < \epsilon$ pour tout $n, m \geq N$.

- 1) Montrer que toute suite convergente $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy ;
- 2) Montrer que toute suite de Cauchy est bornée ;
- 3) Montrer que, si une suite de Cauchy $(x_n)_n$ admet une sous-suite convergeant vers l , alors $(x_n)_n$ converge également vers l .

EXERCICE 8 (**) L'objectif de cet exercice est de montrer que la suite de terme général $x_n = \sin(n)$ ne converge pas. On rappelle

$$\sin^2(a) + \cos^2(a) = 1, \quad \sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a), \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

On procède ici par l'absurde. On suppose que $(x_n)_n$ converge vers $l \in \mathbb{R}$ et on va tenter d'aboutir à une contradiction.

- 1) Montrer que

$$\sin(n + 1) - \sin(n - 1) = 2\sin(1)\cos(n).$$

- 2) En utilisant que $\lim_n x_n = l$, montrer que $\lim_n \cos(n) = 0$.
- 3) Montrer que $l = 0$.
- 4) Conclure par l'absurde.

EXERCICE 9 (*) Soient $(x_n)_n$ une suite croissante et $(y_n)_n$ une suite décroissante vérifiant la propriété suivante :

$$\lim_n (y_n - x_n) = 0.$$

- 1) Montrer que $y_n \geq x_n$ pour tout n .
- 2) Montrer que $(x_n)_n$ est majorée et que $(y_n)_n$ est minorée.
- 2) Montrer que $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ convergent vers la même limite.

EXERCICE 10 Montrer qu'une suite d'entiers qui converge est constante à partir d'un certain rang.

2.2 topologie dans \mathbb{R}^d

2.2.1 Ouverts de \mathbb{R}^d

On a introduit plus haut la notion de boule dans \mathbb{R}^d . Pour rappel : Soit $x \in \mathbb{R}^d$ et $\epsilon > 0$. La boule de centre x et de rayon ϵ est l'ensemble de vecteurs de \mathbb{R}^d donné par :

$$B(x, \epsilon) := \{z \in \mathbb{R}^d : \|z - x\| < \epsilon\}.$$

Nous pouvons alors définir le concept d'ensemble ouvert :

DEFINITION 8 *Un sous-ensemble U de \mathbb{R}^d est ouvert si, pour tout $x \in U$, il existe ϵ tel que $B(x, \epsilon) \subset U$.*

Un ensemble ouvert contenant le point x est appelé voisinage de x . Une manière d'interpréter la définition d'ouvert est la suivante : partant de n'importe quel point d'un ensemble ouvert U , on peut se déplacer dans n'importe quelle direction tout en restant dans l'ensemble U .

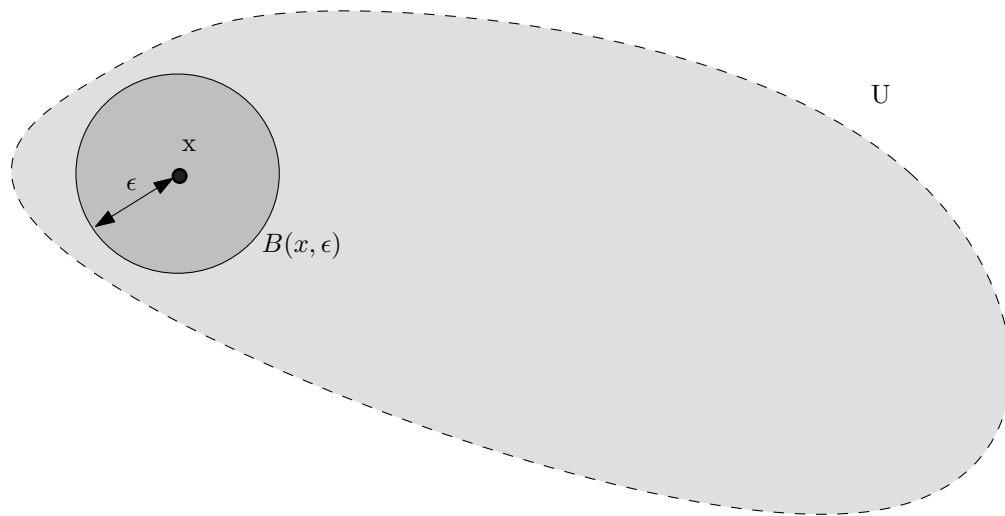


FIGURE 2.1 – les points à la "frontière" ne sont pas dans U .

REMARQUE 1 *Quelques commentaires :*

- 1) *L'intervalle $U =]0, 1[$ est un ensemble ouvert de \mathbb{R} . En effet, soit $x \in U$: cela signifie que $0 < x < 1$. Soit $\epsilon > 0$ choisi tel que $\epsilon < 1 - x$ et $\epsilon < x$ (par exemple, on peut prendre*

$\epsilon = \min\{x/2, (1-x)/2\}$. On a alors $0 < x - \epsilon < x + \epsilon < 1$. Ainsi on a $B(x, \epsilon) =]x - \epsilon, x + \epsilon[\subset]0, 1[= U$.

A contrario, l'ensemble $U' =]0, 1]$ n'est pas ouvert. En effet, il existe une boule ouverte autour de chaque point de U' , sauf autour du point $x = 1$. Ainsi, $B(1, \epsilon) =]1 - \epsilon, 1 + \epsilon[$, et pour tout $\epsilon > 0$, il existe un point de $B(1, \epsilon)$ qui n'est pas inclus dans U' (par exemple le point $1 + \frac{\epsilon}{2}$).

- 2) Il n'est pas difficile de montrer que $B(x, r)$ est un sous ensemble ouvert de \mathbb{R}^d . Ceci est dû à l'inégalité stricte dans la définition d'une boule. Soit $y \in B(x, r)$. Il faut montrer qu'il existe $\epsilon' > 0$ tel que $B(y, \epsilon') \subset B(x, r)$. Soit $\delta = \|y - x\| < r$. On pose $\epsilon := r - \delta$. On montre maintenant que $B(y, \epsilon) \subset B(x, r)$. Soit $z \in B(y, \epsilon)$. On a

$$\|z - x\| \leq \|z - y\| + \|y - x\| < \epsilon + \delta = r.$$

Le résultat est prouvé.

- 3) Un ensemble ouvert de \mathbb{R}^d devra toujours être "de dimension d ". Par exemple, dans \mathbb{R}^2 , l'ensemble $\{(x, 0), x \in]0, 1[\}$, qui correspond au segment ouvert $]0, 1[$ plongé dans le plan n'est pas un ensemble ouvert de \mathbb{R}^2 . Si l'on considère un point $(x, 0)$ de ce segment, toute boule de \mathbb{R}^2 centrée en $(x, 0)$ contient des éléments non situés sur la droite.
- 4) Bien entendu, \mathbb{R}^d est un ouvert de \mathbb{R}^d . Par convention, l'ensemble vide est également ouvert. En effet, Puisque il ne contient aucun x , toute assertion du type " pour tout $x \in U, \dots$ " est forcément vérifiée sur l'ensemble vide.

PROPOSITION 10 Soit $(U_i)_i$ une famille d'ensemble ouverts de \mathbb{R}^d

- a) Alors $U = \cup_i U_i$ est ouvert ;
 b) Si cette famille est **finie**, alors $V := \cap_i U_i$ est ouvert.

Preuve. La première propriété est simple. Soit $x \in U = \cup_i U_i$. Cela signifie qu'il existe i_0 tel que $x \in U_{i_0}$. Puisque U_{i_0} est ouvert, il existe $\epsilon > 0$ tel que $B(x, \epsilon) \subset U_{i_0} \subset U$. Donc U est ouvert.

Soit $x \in V = \cap_i U_i$. Le point x appartient à tous les ensembles U_i donc, pour chaque i , il existe $\epsilon_i > 0$ tel que $B(x, \epsilon_i) \subset U_i$. Posons $\epsilon = \min_i \{\epsilon_i\}$. Le minimum d'un nombre fini de nombres réels strictement positifs est strictement positif. Ainsi $\epsilon > 0$. On a donc pour tout i

$$B(x, \epsilon) \subset B(x, \epsilon_i) \subset U_i.$$

On obtient donc $B(x, \epsilon) \subset \cap_i U_i = V$. ■

EXEMPLE 6 Soit $U_1 =]0, 1[$ et $U_2 =]\frac{1}{2}, 2[$. Alors $U_1 \cup U_2$ et $U_1 \cap U_2$ sont ouverts. Si $U_3 =]\frac{1}{2}, 2[$, alors $U_1 \cup U_3$ est ouvert mais $U_1 \cap U_3$ ne l'est pas.

REMARQUE 2 Le point b ne tient que parce que la famille est finie. Soit $V_n =]-1 - 1/n, 1 + 1/n[$. Alors l'intersection infinie de tous les V_n correspond au segment $[-1, 1]$ qui n'est pas ouvert.

DEFINITION 9 Soit A un sous-ensemble de \mathbb{R}^d . On note $\text{Int}(A)$ l'intérieur de A égal à la réunion de tous les ensembles ouverts contenus dans A .

Par la proposition précédente, l'intérieur de A est un ensemble ouvert de \mathbb{R}^d . En fait, il s'agit du plus grand ensemble ouvert inclus dans A . Bien entendu $A = \text{Int}(A)$ ssi A est ouvert.

2.2.2 Fermés, compacts de \mathbb{R}^d

DEFINITION 10 Un sous-ensemble F de \mathbb{R}^d est fermé si son complémentaire est ouvert.

EXEMPLE 7

L'ensemble $U = [0, 1]$ est fermé dans \mathbb{R} , car son complémentaire dans \mathbb{R} est ouvert.

Le singleton $\{a\}$ est fermé dans \mathbb{R} pour la même raison.

L'ensemble $U' =]0, 1[$ n'est pas fermé. La raison n'est pas que U' est ouvert, mais bien que le complémentaire de U' n'est pas ouvert.

L'ensemble $U'' = [0, +\infty[$ est fermé. En effet, son complémentaire est ouvert.

THEOREM 5 (Caractérisation par les suites) $F \subset \mathbb{R}^d$ est fermé si et seulement si pour toute suite convergente $(x_n)_n$ d'éléments de F , la limite $x \in \mathbb{R}^d$ est un élément de F .

Preuve. Supposons que F est fermé et considérons une suite $(x_n)_n$ de F , admettant une limite x . Il faut montrer que $x \in F$. Supposons que ce n'est pas vrai : $x \in F^c$. Par définition F^c est un ensemble ouvert donc il existe $\epsilon > 0$ tel que $B(x, \epsilon) \subset F^c$. Puisque $(x_n)_n$ converge vers x , il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, on a $x_n \in B(x, \epsilon)$, ce qui implique que $x_n \in F^c$ pour $n \geq N$. C'est une contradiction. On a donc prouvé que $x \in F$.

Il faut maintenant prouver l'implication inverse : si toute suite convergente $(x_n)_n$ a sa limite dans F , alors F est fermé. Procédons par contraposée. Supposons que F n'est pas fermé (c'est à dire que F^c n'est pas ouvert). On doit montrer qu'il existe une suite $(x_n)_n$ de F qui converge vers $x \in F^c$. Si F^c n'est pas ouvert, il existe $x \in F^c$ tel que, pour tout $\epsilon > 0$ (Attention à la négation de la définition d'un ouvert - le "il existe" devient "pour tout"), $B(x, \epsilon)$ n'est pas inclus dans F^c . En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B(x, 1/n)$ n'est pas inclus dans F^c . Donc $B(x, 1/n) \cap F \neq \emptyset$. Cela signifie que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in F \cap B(x, 1/n)$. La suite $(x_n)_n$ converge vers x car $\|x_n - x\| < 1/n$. On a donc trouvé une suite $(x_n)_n$ de F qui converge vers $x \in F^c$. La contraposée est prouvée. ■

REMARQUE 3 Quelques commentaires :

- On trouve parfois la caractérisation par les suites comme définition d'un fermé et le fait que le complémentaire est ouvert comme caractérisation.
- Il faut bien comprendre que, si un ensemble n'est pas ouvert, cela n'implique pas nécessairement qu'il est fermé (voir exercices)

PROPOSITION 11 Soit $(F_i)_i$ une famille d'ensemble fermés de \mathbb{R}^d .

- a) Alors $F = \cap_i F_i$ est fermé ;
 b) Si cette famille est **finie**, alors $\cup_i F_i$ est fermé.

Preuve. Nous rappelons les lois de De Morgan : Si A et B sont des parties de E , alors

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

En généralisant,

$$(\cap_i F_i)^c = \cup_i F_i^c$$

$$(\cup_i F_i)^c = \cap_i F_i^c$$

a) Puisque tous les F_i sont fermés, tous les F_i^c sont ouverts donc l'union des F_i^c est ouvert. Par conséquent $(\cap_i F_i)^c$ est ouvert et donc $\cap_i F_i$ est fermé.

b) Tous les F_i^c sont ouverts, donc s'il y en a une famille finie, $\cap_i F_i^c$ est ouvert, donc $(\cup_i F_i)^c$ aussi, et $\cup_i F_i$ est fermé. ■

DEFINITION 11 Soit $A \subset \mathbb{R}^d$. On appelle fermeture de A l'intersection de tous les fermés contenant A , et on la note \overline{A} .

l'ensemble \overline{A} est donc le plus petit fermé contenant A . Bien entendu, $A = \overline{A}$ si et seulement si A est fermé.

LEMMA 2 Soit $x \in \overline{A}$. Alors pour tout $\epsilon > 0$, on a $B(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$.

Preuve : Soit $x \in \overline{A}$. Supposons qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $B(x, \epsilon) \cap A = \emptyset$. Alors notons $F = \overline{A} \cap (B(x, \epsilon))^c$. Clairement F est fermé et il ne contient pas x donc $F \subset \overline{A}$ et $F \neq \overline{A}$. De plus $A \subset F$. Par conséquent, F est un fermé contenant A . Ceci est en contradiction avec la définition de \overline{A} . ■

Nous pouvons maintenant prouver la caractérisation suivante de la fermeture de A .

PROPOSITION 12 Soit A un sous-ensemble de \mathbb{R}^d . Alors $x \in \overline{A}$ ssi il existe une suite de A qui converge vers x

Preuve. Soit $x \in \overline{A}$ et $n \in \mathbb{N}$. Comme on l'a vu plus haut, $B(x, 1/n) \cap A \neq \emptyset$. Il existe donc $x_n \in A$ tel que $\|x_n - x\| < 1/n$. Par conséquent, $(x_n)_n$ converge vers x .

On montre maintenant l'autre sens. Supposons qu'il existe une suite $(x_n)_n$ de A qui converge vers x . On montre alors que x appartient à \overline{A} . Puisque $(x_n)_n$ est une suite de A , c'est aussi une suite de \overline{A} , qui est fermé. Puisque $(x_n)_n$ converge, sa limite x est dans \overline{A} . ■

DEFINITION 12 (Frontière) Soit $A \subset \mathbb{R}^d$. On appelle frontière de A , l'ensemble $Fr(A) := \overline{A} \setminus Int(A)$.

On remarquera que l'on peut aussi écrire $Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{A^c}$. Les éléments de la frontière peuvent être vus comme les points de \mathbb{R}^d étant arbitrairement proches de points de A et de points du complémentaire de A (voir exercices).

DEFINITION 13 Soit $A \subset \mathbb{R}^d$. On dit que A est borné s'il existe $M > 0$ tel que

$$\|x\| \leq M, \forall x \in A.$$

Attention : Dans \mathbb{R} , la définition ne dit pas que $x \leq M$ (ce qui donnerait simplement un majorant, elle dit bien que $|x| \leq M$ (ce qui garantit donc un majorant et un minorant). Par exemple, l'ensemble $[-2, 1]$ n'est pas borné par 1, car $|-2| = 2 > 1$. Il est en revanche borné par 2.

DEFINITION 14 (Compact) Un sous-ensemble $K \subset \mathbb{R}^d$ est dit compact s'il est fermé et borné.

Dans \mathbb{R} , tout intervalle de la forme $[a, b]$, avec $-\infty < a < b < +\infty$ est compact. Par contre, $[a, +\infty[$ n'est pas compact (bien qu'il soit fermé), et $[a, b[$ non plus (bien qu'il soit borné).

Par la proposition précédente, toute intersection de fermés est fermée. Puisque toute intersection d'ensembles bornés est également bornée, l'intersection de compacts est compacte ; De même, toute union finie de compacts est compacte, puisque qu'elle est fermée et également bornée.

Le théorème suivant est très important :

THEOREM 6 (Bolzano-Weierstrass) un sous-ensemble $K \subset \mathbb{R}^d$ est compact ssi, de toute suite $(x_n)_n$ de K , on peut extraire une sous-suite qui converge dans K .

Avant de donner la preuve de ce résultat, faisons quelques remarques sur ce théorème.
1- Notons que dans un compact, il y a des suites qui peuvent ne pas converger. Par exemple, la suite $-1, 1, -1, 1, \dots$ ne converge pas. Cela dit l'ensemble $\{-1\} \cup \{1\}$ est compact. En effet, dans la suite $-1, 1, -1, 1, \dots$ il y a une sous-suite qui converge. Pour être compact, il n'est donc pas nécessaire que toutes les suites convergent.

2- Dans \mathbb{R} , la suite $1, 2, 3, 4, \dots$ ne converge pas, et aucune de ses sous-suite ne converge. Le théorème nous dit donc que \mathbb{R} n'est pas compact. Le fait que cette suite n'est pas bornée nous dit que \mathbb{R} ne l'est pas non plus

3- Enfin, l'ensemble $]0, 1[$ n'est pas compact. En effet, la suite d'éléments général $1/n$ a tous ses éléments dans $]0, 1[$, elle converge vers 0, donc toutes les sous suites aussi. Pourtant, $0 \notin K$, donc $]0, 1[$ n'est pas fermé.

Preuve. Tout d'abord, on vérifie facilement que si, de toute suite de K , l'on peut toujours extraire une sous-suite convergente dans K , alors K est fermé et borné. Soit $(x_n)_n$ une suite de K qui converge vers $x \in \mathbb{R}^d$. Par hypothèse, elle admet une sous-suite qui converge dans

K . Donc $x \in K$. Par caractérisation des ensembles fermés, K est donc fermé. Supposons maintenant que K n'est pas borné. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in K$ tel que $\|x_n\| > n$. Il est facile de vérifier qu'une sous-suite quelconque de la suite $(x_n)_n$ ainsi construite ne converge pas (elle n'est pas bornée!).

Nous prouvons l'implication inverse dans le cas particulier d'un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Etape 0. Posons $a_0 = a, b_0 = b$. On note $c_0 = (a_0 + b_0)/2$. Un des deux ensembles (au moins) $[a_0, c_0]$ ou $[c_0, b_0]$ contient une infinité de termes de la suite $(x_n)_n$.

Etape 1. Si $[a_0, c_0]$ est infini, on pose $a_1 = a_0$ et $b_1 = c_0$; sinon, on pose $a_1 = c_0$ et $b_1 = b_0$. Le segment $[a_1, b_1]$ contient donc une infinité de termes de $(x_n)_n$. On pose $c_1 = (a_1 + b_1)/2$. Un des deux intervalles $[a_1, c_1]$ et $[c_1, b_1]$ contient une infinité de termes de $(x_n)_n$.

Etape k. Si $[a_{k-1}, c_{k-1}]$ est infini, on pose $a_k = a_{k-1}$ et $b_k = c_{k-1}$; sinon, on pose $a_k = c_{k-1}$ et $b_k = b_{k-1}$. Le segment $[a_k, b_k]$ contient donc une infinité de termes de $(x_n)_n$. On pose $c_k = (a_k + b_k)/2$. Un des deux intervalles $[a_k, c_k]$ et $[c_k, b_k]$ contient une infinité de termes de $(x_n)_n$.

On continue ainsi. De cette manière, on a construit deux suites adjacentes $(a_k)_k$ et $(b_k)_k$ (le vérifier!). On sait donc que $(a_k)_k$ et $(b_k)_k$ convergent vers la même limite $l \in [a, b]$. Nous allons montrer que l est la limite d'une certaine sous-suite de $(x_n)_n$.

On pose $n_0 = 0$, donc $x_{n_0} = x_0$. Ensuite, on choisit $n_1 > 0$ tel que $x_{n_1} \in [a_1, b_1]$ (possible car $[a_1, b_1]$ contient une infinité de termes de la suite), puis $n_2 > n_1$ tel que $x_{n_2} \in [a_2, b_2]$ (même argument, $[a_2, b_2]$ contient une infinité de termes de la suite) etc... A l'étape k , on choisit $n_k > n_{k-1}$ tel que $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$. Finalement, on a construit une sous-suite $(x_{n_k})_k$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$. On a

$$a_k \leq x_{n_k} \leq b_k.$$

Puisque les deux suites $(a_k)_k$ et $(b_k)_k$ convergent vers l , on a $\lim_k x_{n_k} = l \in [a, b]$. On a construit une sous-suite de $(x_n)_n$ qui converge vers une limite $l \in [a, b]$. ■

2.2.3 Exercices

EXERCICE 11 (*) Soit $r > 0$ et $x \in \mathbb{R}^d$. On note $B_f(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^d : \|x - y\| \leq r\}$. Montrer que $B_f(x, r) = \overline{B(x, r)}$.

EXERCICE 12 (*) Soit $U_n =]-1/n, 1/n[$. A quoi est égal l'ensemble $V := \bigcap_{i=1}^{+\infty} U_i$? V est-il ouvert?

EXERCICE 13 (*) Soit $A \subset \mathbb{R}^d$ et $x \in \text{Int}(A)$. Soit $(x_n)_n$ une suite de \mathbb{R}^d qui converge vers x . Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $x_n \in A$.

EXERCICE 14 Soit $A = [0, 1[$. A est-il un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R} ? fermé?, les deux?

EXERCICE 15 (***) Soit $A \subset \mathbb{R}^d$. Montrer que $(\text{Int}(A))^c = \overline{A^c}$.

EXERCICE 16 (*) Montrer que $\text{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{A^c}$. Soit $x \in \text{Fr}(A)$ et $\epsilon > 0$. Montrer que la boule de centre x et de rayon ϵ intersecte A et A^c .

EXERCICE 17 Soit K un sous-ensemble compact de \mathbb{R}^d et $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que l'ensemble $f(K) = \{f(x) : x \in K\}$ est compact.

EXERCICE 18 (***) Soit A un sous-ensemble **non vide** de \mathbb{R}^d tel que $A \neq \mathbb{R}^d$. Soit $x \in A$ et $y \notin A$. On note $[x, y]$ le segment de droite entre les points x et y :

$$[x, y] := \{tx + (1-t)y : t \in [0, 1]\}.$$

- 1) On note $\phi : t \in [0, 1] \mapsto tx + (1-t)y$. Soit $t_0 := \inf\{t \geq 0 : \phi(t) \in A\}$. Montrer que t_0 est bien défini.
- 2) Montrer que $\phi(t_0) \in \overline{A^c}$.
- 3) Montrer que $\phi(t_0) \in \overline{A}$ en faisant un raisonnement par l'absurde. En déduire que $\phi(t_0) \in \text{Fr}(A)$.
- 4) Montrer que A ne peut pas être à la fois ouvert et fermé (indication : on pourra montrer qu'un ensemble ouvert et fermé a une frontière vide).

EXERCICE 19 (***) Soit $(U_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de \mathbb{R}^d . On dit que $(U_i)_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de A si $A \subset \cup_{i \in I} U_i$. Soit K un compact de \mathbb{R}^d et $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de K . Le but de l'exercice est de montrer le résultat suivant :

"Soit K une partie compacte de \mathbb{R}^d . et $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de K . Alors il existe un sous recouvrement fini : $\exists i_1, \dots, i_p \in I$ tels que $K \subset \cup_{i=1}^p U_i$ ".

- 1) Montrer par l'absurde la proposition suivante

$$\exists \epsilon > 0, \forall x \in K, \exists i(x) \in I : B(x, \epsilon) \subset U_{i(x)}.$$

- 2) Montrer qu'il existe x_1, \dots, x_m tels que $K \subset \cup_{j=1}^m B(x_j, \epsilon)$.
- 3) Conclure.

Chapitre 3

Optimisation libre

3.1 Optimisation libre dans \mathbb{R}

On considère une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et un intervalle C de \mathbb{R} . On cherche à caractériser les extrema locaux ou globaux de la fonction f sur l'ensemble C . Lorsque l'on rajoute des hypothèses de convexité sur C et sur la fonction f , nous nous intéresserons alors à l'optimisation globale (optimisation convexe). Rappelons quelques définitions de base.

DEFINITION 15 Soit $\hat{x} \in C$

(i) \hat{x} est un minimum global de f sur C si l'on a

$$f(y) \geq f(\hat{x}), \forall y \in C;$$

On écrit alors $\hat{x} \in \text{Argmin}_{x \in C} f(x)$ ou bien $\hat{x} \in \text{Argmin}_C f$.

(ii) c'est un minimum local de f sur C s'il existe $r > 0$ tel que

$$f(y) \geq f(\hat{x}), \forall y \in C, |\hat{x} - y| \leq r.$$

(iii) c'est un maximum global de f sur C si l'on a

$$f(y) \leq f(\hat{x}), \forall y \in C;$$

On écrit alors $\hat{x} \in \text{Argmax}_{x \in C} f(x)$ ou bien $\hat{x} \in \text{Argmax}_C f$.

(iv) c'est un maximum local de f sur C s'il existe $r > 0$ tel que

$$f(y) \leq f(\hat{x}), \forall y \in C, |\hat{x} - y| \leq r.$$

• Si $C \equiv \mathbb{R}$, alors nous avons

THEOREM 7 (Condition du premier ordre) Si $f \in C^1$ et \hat{x} est un maximum ou un minimum de f , alors $f'(\hat{x}) = 0$.

Remarquez que ce théorème donne des conditions nécessaires, pas forcément suffisantes. Prenez $f(x) = x^3$ pour vous en convaincre. Nous pouvons énoncer les conditions suffisantes :

THEOREM 8 Supposons que $f'(\hat{x}) = 0$. Alors, s'il existe un ouvert $U \subset \mathbb{R}$, avec $\hat{x} \in U$, tel que pour tout $x \in U$,

- (a) $f'(x) \geq 0$ si $x \leq \hat{x}$ et $f'(x) \leq 0$ si $x \geq \hat{x}$, alors \hat{x} est un maximum local de f
- (b) $f'(x) \leq 0$ si $x \leq \hat{x}$ et $f'(x) \geq 0$ si $x \geq \hat{x}$, alors \hat{x} est un minimum local de f

Si la fonction f est C^2 , alors nous pouvons énoncer les conditions nécessaires suivantes :

THEOREM 9 Si f est C^2 , alors

- (a) Si \hat{x} est un maximum local, alors $f'(\hat{x}) = 0$ et $f''(\hat{x}) \leq 0$
- (b) Si \hat{x} est un minimum local, alors $f'(\hat{x}) = 0$ et $f''(\hat{x}) \geq 0$

Nous avons également les conditions suffisantes suivantes :

THEOREM 10 (Conditions du second ordre) Si f est C^2 , alors

- (a) Si $f'(\hat{x}) = 0$ et $f''(\hat{x}) < 0$, alors \hat{x} est un maximum local de f
- (b) Si $f'(\hat{x}) = 0$ et $f''(\hat{x}) > 0$, alors \hat{x} est un minimum local de f

Pour vous convaincre de la distinction entre conditions nécessaires et suffisantes, considérons $f(x) = x^4$. Alors le point $\hat{x} = 0$ est un minimum local de f (en fait c'est même le minimum global). Nous avons bien $f'(0) = 0$ et $f''(0) \geq 0$, mais nous n'avons pas $f''(0) > 0$.

REMARQUE 4 Si f est C^2 et convexe (i.e. $f''(x) \geq 0$ pour tout x), alors $f'(\hat{x}) = 0$ est une condition nécessaire et suffisante pour dire que \hat{x} est un minimum global.

De même, si f est concave (i.e. $f''(x) \leq 0$ pour tout x), alors $f'(\hat{x}) = 0$ est une condition nécessaire et suffisante pour dire que \hat{x} est un maximum global.

• Si $C \subset \mathbb{R}$ est un intervalle fermé et borné, alors nous avons

THEOREM 11 (Valeurs extrêmes (Weierstrass)) Si f est continue sur un fermé borné C , alors f est bornée et atteint ses bornes (et donc il existe un minimum global et un maximum global sur C)

Preuve On a montré en exercice que $f(C)$ est compact (voir chapitre précédent). Rappelons l'argument pour faciliter la lecture : On montre que $f(C)$ est borné par l'absurde. Supposons que l'ensemble $f(C) := \{f(x) : x \in C\}$ n'est pas borné. Alors il existe une suite $(x_n)_n$ de C tel que $|f(x_n)| \rightarrow_n +\infty$. Puisque C est compact, il existe une sous-suite $(x_{n_k})_k$ de $(x_n)_n$ qui converge vers $x \in C$. La fonction f étant continue, $f(x) = \lim_k f(x_{n_k})$, ce qui est une contradiction car $|f(x_{n_k})| \rightarrow_k +\infty$.

On montre maintenant que $f(C)$ est fermé. Soit $(y_n)_n$ une suite de $f(C)$ telle que $\lim_n y_n = y$. On doit montrer que $y \in f(C)$. Par définition de $f(C)$, pour tout n , il existe $x_n \in C$ tel que $y_n = f(x_n)$. Puisque C est compact, $(x_n)_n$ admet une sous-suite convergente $(x_{n_k})_k : \lim_k x_{n_k} = x \in C$. Par passage à la limite, $\lim_k f(x_{n_k}) = f(x) \in f(C)$.

Puisque $f(C)$ est borné, il admet une borne supérieure et une borne inférieure. Vérifions que f atteint ses bornes : appelons $M = \sup f(C)$. Alors M est la limite de points de $f(C)$. Mais puisque $f(C)$ est compact, il est aussi fermé, donc $M \in f(C)$. Par conséquent, il existe un point $\hat{x} \in C$ tel que $f(\hat{x}) = M$. La démonstration pour la borne inférieure se déduit de la même manière. ■

Si C est un intervalle de la forme $[a, b]$. Pour déterminer le maximum global sur $[a, b]$, il convient donc de déterminer tous les points $x \in [a, b]$ tels que $f'(x) = 0$, vérifier s'il s'agit de maxima ou de minima, puis comparer les valeurs de $f(x)$ avec celles de $f(a)$ et de $f(b)$.

REMARQUE 5 *L'existence d'un maximum et d'un minimum globaux n'est assurée que parce que l'intervalle est fermé borné. En effet, sur \mathbb{R} , ces extrema globaux n'existent pas toujours. Prenez encore la fonction $f(x) = x^3$ pour vous en convaincre.*

REMARQUE 6 *Notez que chercher un maximum de f sur un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ revient à maximiser f sous contrainte que $x \geq a$ et $x \leq b$.*

REMARQUE 7 *Les conditions de premier et de second ordre restent inchangées dès lors que $\hat{x} \in]a, b[$.*

3.2 Rappels de dérivation dans \mathbb{R}^n

In this reminder we consider \mathbb{R}^2 only. Everything extends directly to \mathbb{R}^n .

Let $U \subset \mathbb{R}^2$ be a non-empty open set and let $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ be a real function that is differentiable.

$$\begin{aligned} f : U &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto f(x, y) \end{aligned}$$

Let S be the surface traced out by $z = f(x, y)$:

$$S = \{(x, y, z) : z = f(x, y)\}.$$

3.2.1 Partial derivatives

If we fix y to be constant, then we can study the variations of $f(x, y)$ when x varies by looking at the derivative of $f(x, y)$ with respect to x , called the **partial derivative** of f with respect to x . It is written

$$\frac{\partial f}{\partial x} \text{ (or } f_x \text{ or } f_1)$$

Accordingly, the partial derivative of f with respect to y is written

$$\frac{\partial f}{\partial y} \text{ (or } f_y \text{ or } f_2)$$

EXAMPLE 8 $f(x, y) = x^2y + y^5$. Then $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy$ and $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 5y^4$

If f is twice-differentiable, then both $\frac{\partial f}{\partial x}$ and $\frac{\partial f}{\partial y}$ are differentiable, and the **second partial derivatives** are

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \text{ (written } f_{xx} \text{ or } f_{11})$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \text{ (written } f_{yy} \text{ or } f_{22})$$

while the **mixed partial derivatives** are

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \text{ (written } f_{yx} \text{ or } f_{21})$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \text{ (written } f_{xy} \text{ or } f_{12})$$

Notice that $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ is written f_{yx} because f is derived first with respect to y and then to x .

EXAMPLE 9 $f(x, y) = x^2y + y^5$. Then $f_{xx} = 2y$, $f_{yy} = 20y^3$, $f_{yx} = 2x$ and $f_{xy} = 2x$

Notice that in this example, $f_{yx} = f_{xy}$. This is not a coincidence. It is implied by the following theorem.

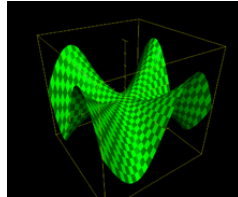
THEOREM 12 (Schwartz' Theorem) *If $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ is of class \mathcal{C}^2 (i.e. it is twice-differentiable and all partial derivatives - first and second order - are continuous functions), then*

$$f_{yx} = f_{xy}$$

The conditions of Schwartz's theorem are sufficient, but sometimes also necessary. Consider the following example

EXAMPLE 10

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{for } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{for } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$



This function is everywhere continuous, but its derivatives at $(0,0)$ cannot be computed algebraically. The partial derivatives are

$$f_x(0, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, y) - f(0, y)}{h} = -y$$

$$f_y(x, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, 0 + h) - f(x, 0)}{h} = x$$

Now,

$$f_{xy}(0, 0) = -1$$

while

$$f_{yx}(0, 0) = 1$$

This is because the second partial derivatives are not continuous in $(0,0)$

3.2.2 Gradient and Hessian

If f is differentiable, at each point (x, y) in the plane we may define the **gradient vector**

$$Df(x, y) = \begin{bmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{bmatrix}$$

If f is \mathcal{C}^2 , We may also define the **Hessian matrix**

$$D^2f(x, y) = \begin{bmatrix} f_{11}(x, y) & f_{12}(x, y) \\ f_{21}(x, y) & f_{22}(x, y) \end{bmatrix}$$

The Hessian is also written $H(x, y)$

EXAMPLE 11 $f(x, y) = xy^4 + x^3y^2$

$$Df(x, y) = \begin{bmatrix} (3x^2 + y^2)y^2 \\ (2x^2 + 4y^2)xy \end{bmatrix}$$

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} 6xy^2 & 2y(3x^2 + 2y^2) \\ 2y(3x^2 + 2y^2) & 2x(x^2 + 6y^2) \end{bmatrix}$$

Notice that H is symmetric. This is a consequence of the Schwartz' theorem, when its conditions are satisfied.

3.2.3 Tangent plane

Let $(x_0, y_0) \in U$ and $z_0 = f(x_0, y_0)$. The surface $S = \{(x, y, z) : z = f(x, y)\}$ passes through the point $P = (x_0, y_0, z_0)$. Moreover, it can be written as

$$S = \{(x, y, z) : g(x, y, z) = 0\},$$

with $g(x, y, z) = f(x, y) - z$. Hence the plane L that is tangent to the surface S at point P is orthogonal to $Dg(x_0, y_0, z_0)$ in P and therefore is defined as

$$L = \{(x, y, z) : g_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + g_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + g_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0\}$$

which gives

$$L = \{(x, y, z) : z = z_0 + (x - x_0)f_x(x_0, y_0) + (y - y_0)f_y(x_0, y_0)\}.$$

EXAMPLE 12 Let $f(x, y) = x^2y + y^5$ and let P be the point $(-3, 2, 50)$. The surface $z = f(x, y)$ passes through this point because $f(-3, 2) = 50$. At P the tangent plane is given by $z = -12x + 89y - 164$.

3.2.4 Chain rule

Assume $z = f(x, y)$ where both x and y in fact depend on a variable t : $x = g(t)$ and $y = h(t)$ where both g and h are defined and differentiable on the appropriate domain. Then z may be written as a function of t : $z = F(t) = f(g(t), h(t))$. We have

$$F'(t) = g'(t)f_x(x, y) + h'(t)f_y(x, y)$$

A more common notation is

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

This reflects the fact that when t changes, f varies as a product of how x and y change when t changes, and of how f changes when x and y change.

EXAMPLE 13 Let $f(x, y) = xy^4 + x^3y^2$, with $x(t) = 2 - 3t$ and $y(t) = 4 + 5t$. Then

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= y^4 + 3x^2y^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 4xy^3 + 2x^3y \\ \frac{dx}{dt} &= -3 \\ \frac{dy}{dt} &= 5\end{aligned}$$

Finally,

$$\frac{dz}{dt} = 10x^3y - 9x^2y^2 + 20xy^3 - 3y^4$$

An important special case is when t is one of the two variables x or y . Assume $t \equiv x$. Then $y = h(x)$ and $z = F(x) = f(x, h(x))$. Applying the chain rule we get

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx}$$

EXAMPLE 14 Let $f(x, y) = xy^4 + x^3y^2$, with $y(x) = 4 + 5x$. Then $\frac{\partial f}{\partial x}$ and $\frac{\partial f}{\partial y}$ are as in the previous example. Now, $\frac{dy}{dx} = 5$, so

$$\frac{dz}{dx} = 10x^3y + 3x^2y^2 + 20xy^3 + y^4$$

3.3 Optimisation libre dans \mathbb{R}^n

Les principes énoncés dans \mathbb{R} sont globalement inchangés ici. Nous ne donnons que les définitions concernant les maxima. Soit un domaine $U \subset \mathbb{R}^n$ et une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}$.

DEFINITION 16 Soit $\hat{x} \in U$

(i) \hat{x} est un maximum global de f sur U si l'on a

$$f(\hat{x}) \geq f(x), \forall x \in U;$$

(ii) \hat{x} est un maximum global strict de f sur U si l'on a

$$f(\hat{x}) > f(x), \forall x \in U;$$

(iii) \hat{x} est un maximum local de f s'il existe $r > 0$ tel que

$$f(\hat{x}) \geq f(x), \forall x \in U, \|\hat{x} - x\| \leq r.$$

Autrement dit, il existe une boule centrée en \hat{x} , $B(\hat{x}, r)$ telle que $f(\hat{x}) \geq f(x)$ pour tout $x \in B(\hat{x}, r) \cap U$

Les conditions de premier ordre vues précédemment se généralisent ainsi :

THEOREM 13 (Conditions du premier ordre) Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^1 . Si \hat{x} est un maximum local ou un minimum local de f sur U et si \hat{x} est un point intérieur de U , alors

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\hat{x}) = 0 \text{ pour tout } i = 1, \dots, n$$

Preuve Supposons que \hat{x} soit un maximum local. Puisque \hat{x} est intérieur, il existe une boule $B(\hat{x}, r) \subset U$ telle que $f(\hat{x}) \geq f(x)$ pour tout $x \in B(\hat{x}, r)$. Dans ce cas, \hat{x}_i doit maximiser la fonction d'une seule variable : $x_i \mapsto f(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{i-1}, x_i, \hat{x}_{i+1}, \dots, \hat{x}_n)$ pour $x_i \in B_i(\hat{x}, r) \equiv]\hat{x}_i - r, \hat{x}_i + r[$. Par conséquent,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\hat{x}) = 0$$

En répliquant ce raisonnement pour tout i , nous obtenons le résultat désiré.

REMARQUE 8 La condition peut aussi être exprimée par

$$Df(\hat{x}) = 0_n$$

EXEMPLE 15 Soit $f(x, y) = x^3 - y^3 + 9xy$. Alors les conditions de premier ordre donnent

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 9y = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} = -3y^2 + 9x = 0$$

Ce système admet deux solutions : $(0, 0)$ et $(3, -3)$.

Attention : à ce stade, nous pouvons uniquement dire que ces deux points sont candidats à être des maxima ou minima locaux, mais nous n'en savons pas plus.

Dans le cas à une dimension pour une fonction C^2 , la condition suffisante stipule que si $f'(\hat{x}) = 0$, alors la condition $f''(\hat{x}) < 0$ est suffisante pour dire que \hat{x} est un maximum, tandis que la condition $f''(\hat{x}) > 0$ est suffisante pour dire que \hat{x} est un minimum. Les conditions équivalentes dans \mathbb{R}^n s'expriment en termes de la matrice hessienne H de f :

THEOREM 14 Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 . Soit \hat{x} un point intérieur de U vérifiant $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\hat{x}) = 0$ pour tout $i = 1, \dots, n$. Nous avons :

- (i) si la matrice $H(\hat{x})$ est définie négative, alors \hat{x} est un maximum local strict de f .
- (ii) si la matrice $H(\hat{x})$ est définie positive, alors \hat{x} est un minimum local strict de f .

Preuve Puisque f est C^2 , on peut utiliser le développement de Taylor à l'ordre 2 en n'importe quel point intérieur de U , et en particulier au point \hat{x} :

$$f(\hat{x} + h) = f(\hat{x}) + Df(\hat{x})h + \frac{1}{2}h^T H(\hat{x})h + R(h)$$

où $R(h)$ est un résidu qui tend très vite vers 0 lorsque h tend vers 0, c'est à dire que $\lim_{h \rightarrow 0} R(h)/\|h\|^2 = 0$. Puisque \hat{x} satisfait les conditions de premier ordre, on a

$$f(\hat{x} + h) - f(\hat{x}) \approx \frac{1}{2}h^T H(\hat{x})h$$

Par définition, si la matrice $H(\hat{x})$ est définie négative (resp. positive), le terme $h^T H(\hat{x})h$ est négatif (resp positif) pour tout $h \neq 0$. ■

EXAMPLE 16 Soient les trois fonctions suivantes définies sur \mathbb{R}^2 :

$$\begin{aligned} Q_1(x_1, x_2) &= x_1^2 + x_2^2 \\ Q_2(x_1, x_2) &= -x_1^2 - x_2^2 \\ Q_3(x_1, x_2) &= x_1^2 - x_2^2 \end{aligned}$$

Les conditions du premier ordre nous indiquent que $(0, 0)$ est le seul candidat pour un extremum, pour Q_1, Q_2 et Q_3 . Regardons la hessienne en ce point :

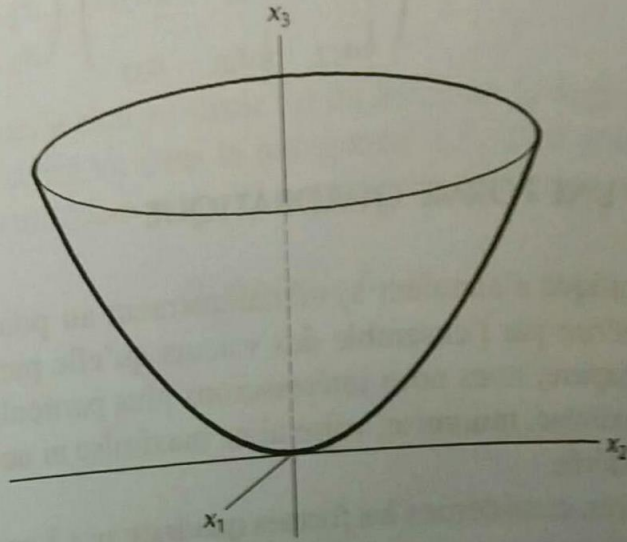
$$H_1(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = -H_2(0, 0) \quad \text{et} \quad H_3(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Clairement, $H_1(0, 0)$ est définie positive, $H_2(0, 0)$ est définie négative et $H_3(0, 0)$ ni positive, ni négative. On peut observer sur les graphes des deux premières fonctions que $(0, 0)$ est bien, respectivement, un minimum, et un maximum.

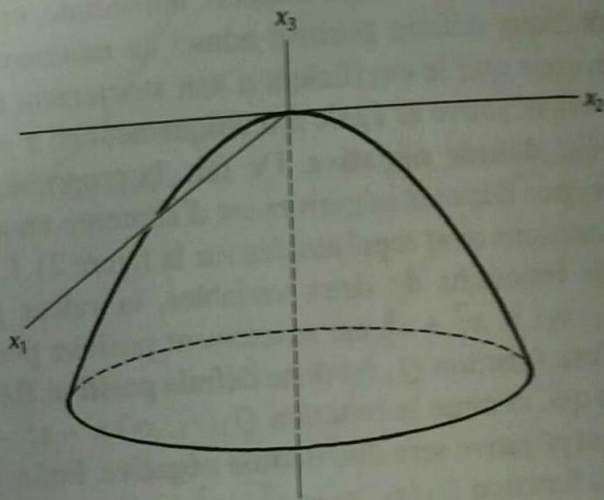
Attention : les conditions du second ordre ne sont que des conditions suffisantes ! Les conditions nécessaires sont moins restrictives :

THEOREM 15 Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 . Soit \hat{x} un point intérieur de U qui est un maximum de local f (resp minimum), alors

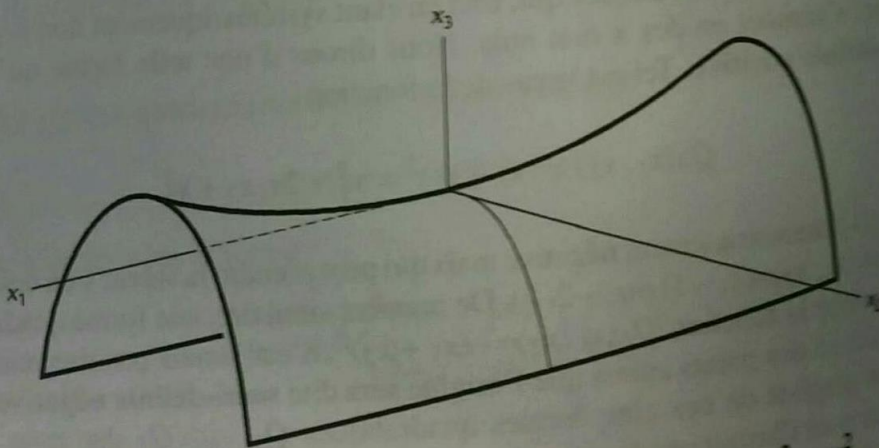
$$Df(\hat{x}) = 0_n \quad \text{et} \quad H(\hat{x}) \text{ est semi-définie négative (resp positive)}$$



Grphe de la forme quadratique définie positive $Q_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$.



Grphe de la forme quadratique définie négative $Q_2(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2$.



Grphe de la forme quadratique indéfinie $Q_3(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$.

Etant données les caractérisations des matrices semi-définies positives et négatives, nous pouvons réécrire le théorème donnant les conditions suffisantes du second ordre comme suit :

THEOREM 16 Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 . Soit \hat{x} un point intérieur de U vérifiant $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\hat{x}) = 0$ pour tout $i = 1, \dots, n$. Nous avons :

- (i) si les n mineurs diagonaux principaux de la matrice $H(\hat{x})$ alternent en signe, le premier étant strictement négatif, alors \hat{x} est un maximum local strict de f
- (ii) si les n mineurs diagonaux principaux de la matrice $H(\hat{x})$ sont tous positifs, alors \hat{x} est un minimum local strict de f

EXAMPLE 17 Reprenons la fonction $f(x, y) = x^3 - y^3 + 9xy$. Nous avons vu que seuls deux points étaient candidats à être des extrema : $(0, 0)$ et $(3, -3)$. La hessienne de f est donnée par

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & 9 \\ 9 & -6y \end{pmatrix}$$

Au point $(0, 0)$, le premier mineur diagonal principal vaut 0, tandis que le second vaut -81 . Ce dernier est non-nul et ne satisfait aucun des deux premiers critères du théorème.

Au point $(3, -3)$, les deux mineurs valent 18 et 243. Ils sont tous deux positifs, donc le point $(3, -3)$ est un minimum local strict de f .

Notez bien qu'il ne s'agit pas d'un minimum global, car par exemple $f(0, y)$ peut être rendu aussi petit qu'on le souhaite.

3.4 Concavité - Convexité

Nous renvoyons le lecteur au chapitre sur la convexité pour plus de détails sur la convexité des ensembles et des fonctions. Ici nous nous contentons de rappeler la définition, ainsi que le critère principal de détermination d'une fonction convexe (resp concave) et d'énoncer le résultat sur les maxima et minima global qui en découlent.

DEFINITION 17 On dira que $U \subset \mathbb{R}^n$ est convexe si, $\forall x, y \in U, \forall \lambda \in [0, 1], \lambda x + (1 - \lambda)y \in U$.

DEFINITION 18 Soit U un ouvert convexe de \mathbb{R}^n et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$. On dira que f est convexe si

$$\forall x, y \in U, \forall \lambda \in [0, 1], f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

On dira que f est concave si $-f$ est convexe.

THEOREM 17 Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble convexe, et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 . Alors

- (a) Les trois conditions suivantes sont équivalentes :
 - (i) f est une fonction concave sur U

- (ii) $f(y) - f(x) \leq Df(x)(y - x)$ pour tout $(x, y) \in U^2$
- (iii) $H(x)$ est semi-définie négative pour tout $x \in U$
- (b) Les trois conditions suivantes sont équivalentes :
 - (i) f est une fonction convexe sur U
 - (ii) $f(y) - f(x) \geq Df(x)(y - x)$ pour tout $(x, y) \in U^2$
 - (iii) $H(x)$ est semi-définie positive pour tout $x \in U$

Puisqu'une fonction convexe (resp concave) a au plus un point stationnaire, nous en déduisons le théorème suivant :

THEOREM 18 Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble convexe, et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 . Alors

- (a) Si f est concave sur U et s'il existe un point \hat{x} tel que $Df(\hat{x}) = 0$, alors \hat{x} est un maximum global de f sur U
- (b) Si f est convexe sur U et s'il existe un point \hat{x} tel que $Df(\hat{x}) = 0$, alors \hat{x} est un minimum global de f sur U

Notez ici encore que ce ne sont que des conditions suffisantes. Notez également que le théorème sur les conditions suffisantes du second ordre nous indique qu'une condition suffisante pour qu'un point \hat{x} soit un maximum (resp minimum) local strict, il suffit de vérifier que la hessienne, évaluée en \hat{x} , est définie négative (resp positive). En effet, montrer qu'elle est semi-définie négative (resp positive) ne suffit pas. Ici, le théorème nous dit que si la hessienne est semi-définie négative (resp positive), non seulement en \hat{x} mais aussi dans tous les autres points de U , alors cela suffit à conclure que c'est un maximum (resp minimum), mais en plus qu'il est global.

EXAMPLE 18 Soit $f(x, y) = -5x^2 - y^2 + 2xy$. On a :

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} -10x + 2y \\ -2y + 2x \end{pmatrix}$$

tandis que la hessienne donne :

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} -10 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

La matrice $H(x, y)$ est définie négative, donc f est concave, elle admet alors un maximum global si et seulement si $Df(x, y)$ s'annule, ce qui arrive uniquement en $(0, 0)$.

Montrons la concavité par le deuxième critère :

Après manipulations, nous avons :

$$f(y_1, y_2) - f(x_1, x_2) - Df(x_1, x_2)(y_1 - x_1, y_2 - x_2) = -5(y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2 + 2(y_1 - x_1)(y_2 - x_2).$$

$$\text{Or } -5a^2 - b^2 + 2ab \leq -(a - b)^2 \leq 0.$$

3.5 Exercices

EXERCICE 20 Déterminez pour chaque fonction les éventuels maxima, minima. Dites également si les extrema sont locaux ou globaux.

- 1) $x^4 + x^2 - 6xy + 3y^2$
- 2) $x^2 - 6xy + 2y^2 + 10x + 2y - 5$
- 3) $xy^2 + x^3y - xy$
- 4) $3x^4 + 3x^2y - y^3$

EXERCICE 21 Pour chacune des fonctions suivantes étudier la nature du point critique donné :

1. $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ au point critique $(0, 0)$;
2. $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 + 6$ au point critique $(0, 0)$;
3. $f(x, y) = x^3 + 2xy^2 - y^4 + x^2 + 3xy + y^2 + 10$ au point critique $(0, 0)$.

EXERCICE 22 Trouver les points critiques de la fonction f suivante et déterminer si ce sont des minima locaux, des maxima locaux.

$$f(x, y) = \sin x + y^2 - 2y + 1$$

EXERCICE 23 Chercher les extrémums des fonctions $f(x, y)$ suivantes :

1. $3xy - x^3 - y^3$
2. $-2(x - y)^2 + x^4 + y^4$
3. $x^2y^2(1 + 3x + 2y)$
4. $2x + y - x^4 - y^4$
5. $\frac{xy}{(x+y)(1+x)(1+y)}$, $x, y > 0$
6. $xe^y + ye^x$
7. $x(\ln^2 x + y^2)$, $x > 0$
8. $\sqrt{x^2 + (1 - y)^2} + \sqrt{y^2 + (1 - x)^2}$

Chapitre 4

Fonctions implicites

4.1 Some intuitions

Assume we have a smooth function F (by smooth, we mean \mathcal{C}^1), defined on $U \subset \mathbb{R}^2$, and such that for some point $(x, y) \in U$, we have $F(x, y) = 0$. The question we ask is whether we can express y as a function of x : $y = h(x)$, at least in some neighborhood of the point (x, y) . When the answer is positive, we say $F(x, y) = 0$ defines an **implicit relation** between x and y , contrary to the explicit relation $y = h(x)$.

We ask this question because under some conditions that we will expose, a positive answer guarantees that there is a bijective relation between variables x and y , and although we cannot always make it explicit, we will know much of how variations of one variable affect the other. This issue is at the heart of many comparative statics exercises as well as constrained optimization.

Let $F(x, y) = x + y - 3$. Then the solutions to $F(x, y) = 0$ are all the points (x, y) such that $x + y - 3 = 0$. Let (x, y) be such a point. Then, we can write $y = 3 - x$, or $y = h(x)$. In this simple case, the relation between x and y exists for any value of x . We say the relation is **global**.

Because $y = h(x)$ where h is a function, we are guaranteed that for any **fixed** x there is a **unique** y such that $F(x, y) = 0$. In addition, the relation $y = 3 - x$ being monotonic, we can invert h and express x as a function of y : $x = h^{-1}(y)$. In our example, $y = 3 - x$ is a well behaved function, which can be inverted so as to obtain $x = 3 - y$.

Consider now the function $F(x, y) := x^2 + y^2 - 4$. Then the equation $F(x, y) = 0$ describes a circle of radius 2 (see Figure ??). When solving, it is possible to express y as : $y = \pm\sqrt{4 - x^2}$. As we observe, the value of y is not uniquely defined, and so there is no global one-to-one

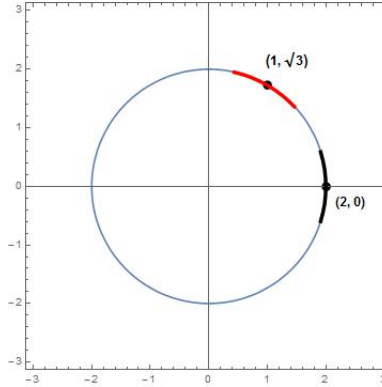


FIGURE 4.1 $-x^2 + y^2 - 4 = 0$

relation between x and y . However, if we look at a specific solution to $F(x, y) = 0$ (say for instance $(x_0, y_0) = (1, \sqrt{3})$), then we know that the relation between x and y is $y = +\sqrt{4-x^2}$, and we also know that in a neighborhood of (x_0, y_0) , the solution y is uniquely defined by $y = +\sqrt{4-x^2}$.

Notice that this solution is unique, but only **locally** around the specific solution $(1, \sqrt{3})$. If we move away from that solution, then the relation between x and y changes (it becomes $y = -\sqrt{4-x^2}$ in the lower part of the circle). But as long as we stay in a neighborhood of (x_0, y_0) , the solution is unique.

Notice also that in the same neighborhood, the relation $y = +\sqrt{4-x^2}$ can be inverted : $x = +\sqrt{4-y^2}$. This is because around (x_0, y_0) , the relation $y = h(x)$ is **monotonic**. This monotonicity condition is crucial to understand the implicit function. Indeed, let us look at what happens if the condition is not satisfied.

Consider the same circle defined by $F(x, y) = 0$. But let us focus on the solution $(2, 0)$. This point lies on the circle, and at that point, the relation $y = +\sqrt{4-x^2}$ is correct. However, this relation does not hold uniquely in a neighborhood of $(2, 0)$: let $x' = 2 - \epsilon$. Then either $y = +\sqrt{4-x^2}$ and $y'_1 = \epsilon'$ (if we move upwards on the circle); or $y = -\sqrt{4-x^2}$ and $y'_2 = -\epsilon'$ (if we move downwards on the circle). Both y'_1 and y'_2 are in a neighborhood of $y = 0$, so the relation $y = h(x)$ is not locally unique.

The immediate consequence is that around $(2, 0)$, the relation between x and y cannot be inverted, because it is non-monotonic. As we go from y'_2 to 0 and to y'_1 , the corresponding value of x increases and decreases. One sufficient condition that guarantees monotonicity is if y does not "change" direction in the neighborhood of a solution (x_0, y_0) . This corresponds to the condition $\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \neq 0$. Indeed, on the circle, $\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \neq 0$ corresponds to $y \neq 0$. Therefore, the implicit relation does not hold at the point $(2, 0)$.

4.2 The theorem

Before we state the theorem, notice an important fact. In the previous example, it was easy to express y as a function of x . This is not always the case. Consider $F(x, y) = \ln(x + y) + xy$ on $\{(x, y) : x + y > 0\}$ and try solving $F(x, y) = 0$ by expressing y as a function of x . Although it is impossible, still, the theorem guarantees that there is an implicit function that links both in the neighborhood of $(1, 0)$ and $(0, 1)$.

THEOREM 19 *Suppose that F is a real-valued function defined on a domain $D \subset \mathbb{R}^2$ and continuously differentiable on an open set $U \subset D$. Let $(x_0, y_0) \in U$ be such that*

$$F(x_0, y_0) = 0$$

and suppose that

$$F_2(x_0, y_0) \neq 0$$

Then there exists a neighborhood V of x_0 and an open set W containing y_0 , and a unique real-valued function $h : V \rightarrow W$, continuously differentiable on V , such that

$$y = h(x) \text{ and } F(x, h(x)) = 0, \forall x \in V.$$

Proof : Here we only prove existence and uniqueness. We will admit continuity and differentiability of h . The proof relies on the intermediate values theorem that we recall here in dimension 1 :

Theorem : Let $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ be continuous. If $\lambda \in \mathbb{R}$ is between $f(a)$ and $f(b)$, then there exists $c \in]a, b[$ such that $f(c) = \lambda$

This theorem is naturally extended to \mathbb{R}^2 . We will also use the additional fact that if f is monotone, then c is unique.

Let us assume, without loss of generality, that $F_2(x_0, y_0) > 0$. Since F_2 is continuous, there exists a neighborhood V' of x_0 and a neighborhood $[\underline{y}, \bar{y}]$ containing y_0 such that $V' \times [\underline{y}, \bar{y}] \subset U$, and such that $F_2 > 0$ on $V' \times [\underline{y}, \bar{y}]$.

This implies that the function $F(x_0, y)$, where the first coordinate is set to x_0 , is increasing in y on $[\underline{y}, \bar{y}]$, and because $F(x_0, y_0) = 0$, necessarily $F(x_0, \underline{y}) < 0$, while $F(x_0, \bar{y}) > 0$.

Now, by continuity, there exists an open set $V \subset V'$ such that for any $x \in V$, we have $F(x, \underline{y}) < 0$ and $F(x, \bar{y}) > 0$.

Fix an arbitrary x in V . For that specific x , the intermediate value theorem applied to the increasing (and hence monotone) function $F(x, y)$, where $y \in [\underline{y}, \bar{y}]$, guarantees that there is a unique y inside $W =]\underline{y}, \bar{y}[$, such that $F(x, y) = 0$. Note that the value of y depends on the x that was chosen in V . Thus, $y = h(x)$. \square

Exercise : Consider the function $F(a, x) = ax^2 + 2x + 1$ and the equation $F(a, x) = 0$. Show under which condition a can be expressed as a function of x . Then show under which condition x can be expressed as a function of a . Explain what happens when the condition is not met.

4.3 Generalization to higher dimensions

In some problems, there are more than 2 variables x and y . Consider for instance the following example :

Let $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ defined as

$$F_1(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = x_1(y_1 + y_2) - x_2 = 0$$

$$F_2(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = x_2(y_1 - 2y_2) - x_3 = 0$$

At any solution of this system, we wish to express y_1 and y_2 as functions of the three variables x_1, x_2, x_3 . The theorem naturally generalizes to higher dimensions. Let $D \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ and $F : D \rightarrow \mathbb{R}^p$, be a \mathcal{C}^1 function. We denote $F = (F_1, \dots, F_p)$ and we consider the set of equations

$$F_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \quad (j = 1, \dots, p), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$$

We wish to express $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_p)$ in terms of $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$ only. We can state a generalized implicit function theorem, for which the validity condition needs to be adapted. Indeed, when $m = p = 1$ as in the previous section, the condition is simply that $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$. This is in fact an equivalent condition to the fact that $\frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}}$ should be invertible.

Let \mathbf{J} be the **Jacobian matrix** $\frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}}$:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_p} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_p}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_p}{\partial y_p} \end{pmatrix}$$

The theorem states that if $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ is such that $F_j(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = 0$ for $j = 1, \dots, p$ and \mathbf{J} is invertible at $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$, then there is a unique local solution

$$y_j = h_j(\mathbf{x}) \quad (j = 1, \dots, p)$$

Remark : remember that \mathbf{J} is invertible $\iff \mathbf{J}$ is of rank $p \iff \text{Det}(\mathbf{J}) \neq 0$.

Example : Consider again the system

$$F_1(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = x_1(y_1 + y_2) - x_2 = 0$$

$$F_2(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = x_2(y_1 - 2y_2) - x_3 = 0$$

Let $x \in \mathbb{R}$. Then the point $(x, x, x, 1, 0)$ is a solution of this system. Let us check whether around this solution we can express y_1 and y_2 as functions of x_1, x_2 and x_3 . First we form the Jacobian

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} x_1 & x_1 \\ x_2 & -2x_2 \end{pmatrix}$$

We have $\text{Det}(\mathbf{J}) = -3x_1x_2$ and $\text{Det}(\mathbf{J}) \neq 0 \iff x_1 \neq 0$ and $x_2 \neq 0$. Therefore, around $(x, x, x, 1, 0)$, with $x \neq 0$, we know that \mathbf{J} is invertible and the theorem applies. Indeed, the first equation leads to

$$y_1 = \frac{x_2}{x_1} - y_2$$

and substituting into the second, we get

$$x_2\left(\frac{x_2}{x_1} - 3y_2\right) = x_3$$

We finally get

$$y_2 = -\frac{1}{3}\left(\frac{x_1x_3 - x_2^2}{x_1x_2}\right)$$

$$y_1 = \frac{1}{3}\left(\frac{x_1x_3 + 2x_2^2}{x_1x_2}\right)$$

One can check that, indeed, when $\text{Det}(\mathbf{J}) = 0$, y_1 and y_2 cannot be defined as functions of x_1, x_2, x_3 .

4.4 Comparative Statics

The implicit function theorem has in fact two parts. We have just seen the first part. The second part is a corollary that is extremely useful to conduct comparative statics.

Consider the two-dimensional case : (x, y) is a solution of $F(x, y) = 0$, and $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$. Then the theorem states that there exists a unique function h such that, locally around (x, y) , we have $y = h(x)$.

Therefore, $F(x, y) = 0$ can be rewritten $F(x, h(x)) = 0$. Let $f(x) = F(x, h(x))$. Now, we can use the chain rule and find that

$$f'(x) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, h(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, h(x)) \times h'(x)$$

Because we can move around (x, y) and still have $F(x_0, y_0) = 0$ for (x_0, y_0) in the neighborhood of (x, y) , we know that

$$f'(x) = 0$$

Indeed, the value of F stays at 0, so it does not change, its derivative is 0.

Plugging this back into the chain rule, we get

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0$$

and as a consequence :

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = h'(x) = -\left(\frac{\partial F}{\partial x} / \frac{\partial F}{\partial y}\right)}$$

This is very useful (and quite powerful), because it tells us how one variable (y) should change when the other variable (x) changes, in order for the equation $F(x, y) = 0$ to remain true. And this is valid eventhough we are unable to analytically derive the function h that links y to x . Indeed, notice that the above result **never involves the function h** .

Consider the very first example $F(x, y) = x + y - 3$. We have seen that $y = 3 - x$ is a global solution to $F(x, y) = 0$. So for instance, $x = 1$ and $y = 2$ is a solution. Now, if x changes to $x' = 1.1$, how much does y have to change to guarantee that $F(x', y') = 0$? Here, $y' = 3 - x'$, so $y' = 1.9$. When x has increased 0.1, y has increased -0.1 . This is in line with the second part of the implicit function theorem :

$$-\left(\frac{\partial F}{\partial x} / \frac{\partial F}{\partial y}\right) = -\frac{1}{1} = -1$$

And therefore,

$$\frac{dy}{dx} = -1$$

The previous example was simple because the relation between x and y is linear. The theorem becomes more interesting in more complicated examples : let us come back to the circle example ($F(x, y) = x^2 + y^2 - 4$), and consider the two different solutions $(x_1, y_1) = (1, \sqrt{3})$ in the upper right orthant, and $(x_2, y_2) = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ in the upper left orthant. To find how much y_1 should move when x_1 moves, one option would be to determine whether the relation is $y = h(x) = +\sqrt{4 - x^2}$ or $y = h(x) = -\sqrt{4 - x^2}$ and then derive $h(x)$ and evaluate it at (x_1, y_1) , then start over again with (x_2, y_2) .

The other (simpler) way is to use the theorem :

$$-\left(\frac{\partial F}{\partial x} / \frac{\partial F}{\partial y}\right) = -\frac{2x}{2y}$$

And therefore,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

We immediately observe that the adjustment of y to a change in x depends on x and y (contrary to the linear case, where the adjustments just depended on the respective slopes).

We get :

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx}|_{(x_1, y_1)} &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{dy}{dx}|_{(x_2, y_2)} &= +1 \end{aligned}$$

One can check, indeed, that in the upper right orthant, when x increases, it is necessary that y decreases in order to stay on the circle (which is the set of points such that $x^2 + y^2 = 4$), while in the upper left orthant, y has to increase when x increases. We also observe that in the first case, the decrease is of lesser amplitude than the increase in the second case.

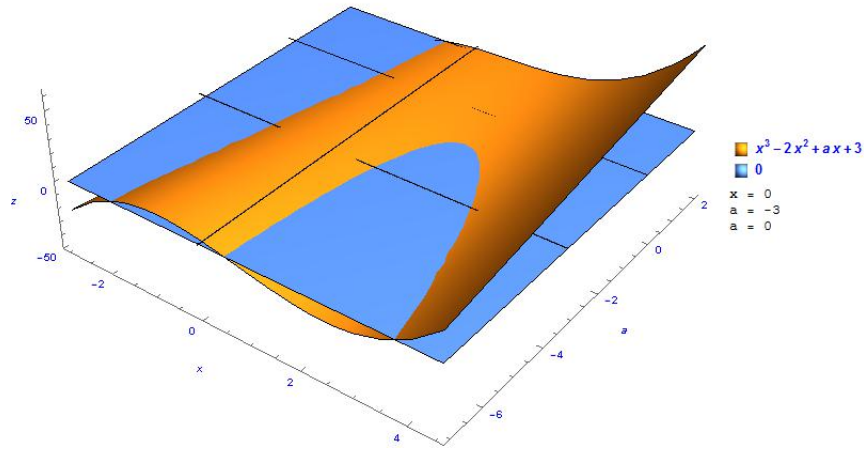


FIGURE 4.2 – Solutions to $x^3 - 2x^2 + ax + 3 = 0$ as a varies
The lines $a = -3$ and $a = 0$ are traced

Consider this last example : $F(a, x) = x^3 - 2x^2 + ax + 3$. Is it very difficult to express a solution x^* as a function of a . It is also difficult to know whether x^* should increase or decrease when a increases. Thanks to the theorem, we can answer this question even though we have no expression of x^* .

$$-\left(\frac{\partial F}{\partial x} \Big/ \frac{\partial F}{\partial a}\right) = -\frac{3x^2 - 4x + a}{x}$$

Studying the sign of this last expression is easy, and tells us precisely when x should increase or decrease following an increase of a .

Let $P(a, x) := -\frac{3x^2 - 4x + a}{x}$ and consider two cases : $a = 2$ and $a = -3$.

- $a = 2$. The graph of $F(a, x)$ shows us that when $a = 2$, the only solution to $F(a, x) = 0$ is for some $x < 0$. Now, the graph of $P(2, x)$ shows us that $P(2, x)$ is positive when $x < 0$. Therefore, around that solution, if a increases, x must also increase for the equation $F(a, x) = 0$ to remain true. We can check on Figure 4.2 that this is correct.

- $a = -3$. Figure 4.2 shows us that there are three solutions to $F(-3, x) = 0$: $x_1 \simeq -1.46$, $x_2 \simeq 0.76$ and $x_3 \simeq 2.7$. The graph of $P(a, x)$ shows that $P(-3, x_1) > 0$, while $P(-3, x_2) > 0$ and $P(-3, x_3) < 0$. Therefore, around the solutions $(-3, x_1)$ and $(-3, x_2)$, if a increases, x should also increase to keep $F(a, x)$ equal to 0, while around $(-3, x_3)$, x should decrease if a increases. This can be checked on Figure 4.2.

Generalization to higher dimensions : when there is more than one equation and two variables, we have seen how the first part of the theorem applies. Let us state here the se-

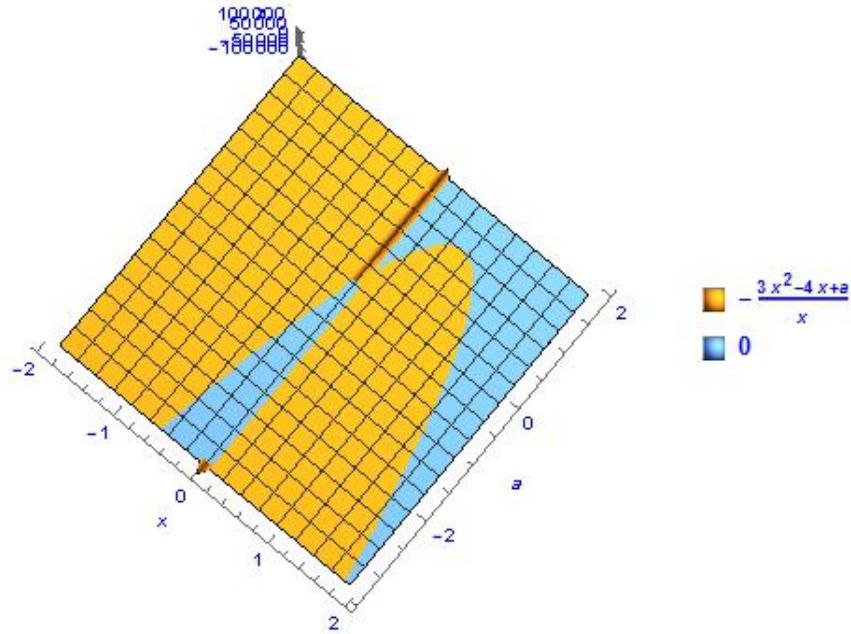


FIGURE 4.3 – Sign of $-\frac{3x^2-4x+a}{x}$

cond part on comparative statics.

We wish to evaluate the different $\frac{dy_j}{dx_i}$, for any $j = 1, \dots, p$ and $i = 1, \dots, m$. By the same means as in two dimensions, we get :

$$\mathbf{J}_h = - \left[\frac{\partial F}{\partial y} \right]^{-1} \left[\frac{\partial F}{\partial x} \right]$$

4.5 Exercises

EXERCICE 24 Consider the equation $x^2 + y^2 = a$ and let x^*, y^* be one solution. How should x^* move when a increases ?

EXERCICE 25 Consider the equation $x^2 - 3xy + y^3 - 7 = 0$. Show that this equation defines y as an implicit function of x around the point $(4, 3)$. Compute $\frac{dy}{dx}$ when $x = 4$. Give an estimate of the solution (x, y) when $x = 4.3$. Repeat the questions around $x = 0$.

EXERCICE 26 Consider the equation $x^2 - xy^3 + y^5 = 17$. Show that this equation defines y as an implicit function of x around the point $(5, 2)$. Give an estimate of the solution (x, y) when $x = 4.8$.

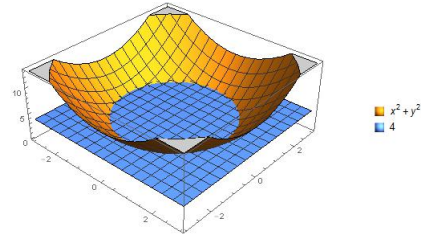
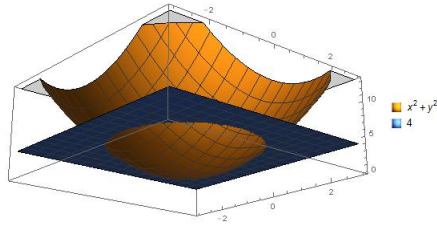


FIGURE 4.4 $-x^2 + y^2$ and the plane $a = 4$

EXERCISE 27 Consider the function $F(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^3$. Can you define z as an implicit function of x and y around $x = 6$ and $y = 3$? Find $\frac{\partial z}{\partial x}(6, 3)$ and $\frac{\partial z}{\partial y}(6, 3)$. Give an estimate of the solution (x, y, z) when $x = 6.2$ and $y = 2.9$.

EXERCISE 28 Consider $x^3 + 3y^2 + 4xz^2 - 3z^2y = 1$. Is z an implicit function of x and y around :

- a) $x = 1, y = 1$
- b) $x = 1, y = 0$
- c) $x = 1/2, y = 0$

Compute $\frac{\partial z}{\partial x}$ and $\frac{\partial z}{\partial y}$ around these points when possible.

Chapitre 5

Optimisation sous contraintes

5.1 Optimisation sous contraintes d'égalité

5.1.1 Une seule contrainte

Commençons par un exemple d'illustration dans \mathbb{R}^2 avec une seule contrainte : supposons que nous souhaitons maximiser $f(x, y)$, sous contrainte que $g(x, y) = 0$, et supposons que $\partial h/\partial y \neq 0$. Alors, nous savons que nous pouvons utiliser le théorème des fonctions implicites et obtenir $y = h(x)$.

En remplaçant dans f , on cherche alors à maximiser $f(x, h(x))$, qui n'est plus qu'une fonction à une seule variable :

$$F(x) := f(x, h(x))$$

Puisqu'on cherche un maximum, la condition du premier ordre est

$$F'(x) = 0 \iff \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} h'(x) = 0$$

Par ailleurs, nous avons aussi

$$h'(x) = - \left(\frac{\partial g}{\partial x} / \frac{\partial g}{\partial y} \right)$$

Nous obtenons donc

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \left(\frac{\partial g}{\partial x} / \frac{\partial g}{\partial y} \right) = 0$$

En notant

$$\lambda = \left(\frac{\partial f}{\partial y} / \frac{\partial g}{\partial y} \right)$$

On obtient l'ensemble de deux équations suivant :

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

Supposons maintenant que nous cherchions à déterminer le maximum libre (i.e. non contraint) d'une autre fonction définie comme suit :

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

Les conditions du premier ordre nous donnent :

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0; \frac{\partial L}{\partial y} = 0; \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$$

Autrement dit,

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0; \frac{\partial f}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0; g = 0$$

Nous voyons donc que chercher le maximum contraint d'une fonction (avec contrainte d'égalité) est équivalent à chercher le maximum non contraint d'une autre fonction qui est liée à la première. La fonction L est appelée **fonction Lagrangienne** ou **Lagrangien** associé au problème initial, et λ est appelé **multiplicateur de Lagrange**. La condition qui nous a permis de faire tout ce qui précède est la condition d'application du théorème des fonctions implicites : $\partial g / \partial y \neq 0$. Nous verrons plus loin que cette condition est une condition suffisante pour que les contraintes soient qualifiées.

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 , $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 . Soit le problème suivant :

$$(P) \quad \begin{cases} \max_x f \\ \text{s.c. } g(x) = 0 \end{cases}$$

THEOREM 20 (Conditions du premier ordre) *Soit x^* une solution du problème (P). Supposons que la contrainte de qualification soit vérifiée, i.e. $\frac{\partial g}{\partial x_i}(x^*) \neq 0$ pour au moins un x_i . Alors il existe un unique $\lambda^* \in \mathbb{R}$ tel que x^* vérifie simultanément les conditions suivantes :*

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(x^*, \lambda^*) = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x^*, \lambda^*) = 0,$$

ce qui se réécrit

$$Df(x^*) - \lambda Dg(x^*) = 0 \quad (\text{CPO1})$$

$$g(x^*) = 0 \quad (\text{CPO2})$$

EXEMPLE 19 Maximiser $f(x, y) = 4xy - 2x^2 + y^2$ sous contrainte que $3x + y = 5$.

• Utilisons la première méthode. Nous exprimons y comme une fonction de x : $y = 5 - 3x$. Donc nous devons maximiser $F(x) = 4x(5 - 3x) - 2x^2 + (5 - 3x)^2$. On obtient

$\frac{\partial F}{\partial x} = -5(2x + 2)$, donc la CPO donne $x^* = -1$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} < 0$, il s'agit donc d'un maximum. Pour conclure, nous trouvons que $y^* = 8$ et $f(x^*, y^*) = 30$.

• Utilisons l'autre méthode. Nous écrivons la contrainte d'égalité sous la forme $g(x, y) = 0$ et formons le Lagrangien : $g(x, y) = 3x + y - 5$ et $L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y) = 4xy - 2x^2 + y^2 - 3\lambda x - \lambda y + 5\lambda$.

Les deux premières CPO donnent : $-4x + 4y = 3\lambda$ et $4x + 2y = \lambda$. Nous résolvons ce système et obtenons $x = -\frac{1}{12}\lambda$ et $y = \frac{2}{3}\lambda$. Il reste à déterminer λ avec la troisième CPO, qui donne : $(-\frac{1}{4} + \frac{2}{3})\lambda = 5$, soit $\lambda^* = 12, x^* = -1, y^* = 8$ et $L(x^*, y^*, \lambda^*) = 30$

Notez deux choses : d'abord, à l'optimum L et f prennent les mêmes valeurs. C'est une conséquence du fait qu'à l'optimum, $g(x, y) = 0$. Ensuite, observez que la deuxième méthode fournit une valeur supplémentaire ($\lambda^* = 12$) par rapport à la première méthode. Cependant, on peut retrouver cette valeur en se rappelant que $\lambda = \left(\frac{\partial f}{\partial y} / \frac{\partial g}{\partial y}\right)$. En effet, $\frac{\partial f}{\partial y}|_{(x^*, y^*)} = 4x^* + 2y^* = 12$ et $\frac{\partial g}{\partial y}|_{(x^*, y^*)} = 1$, donc $\lambda^* = 12$.

Examinons la signification du multiplicateur de Lagrange λ . Dans l'exemple précédent, si nous modifions marginalement la contrainte $3x + y = 5$ pour passer à $3x + y = 5 + \epsilon$ et que nous recommençons l'exercice, nous obtiendrons toujours que $x = -\frac{1}{12}\lambda$ et $y = \frac{2}{3}\lambda$. En revanche, maintenant $(-\frac{1}{4} + \frac{2}{3})\lambda = 5 + \epsilon$. Nous obtenons alors : $x_\epsilon^* = x^*(1 + \frac{\epsilon}{5})$, $y_\epsilon^* = y^*(1 + \frac{\epsilon}{5})$ et $\lambda_\epsilon^* = \lambda^*(1 + \frac{\epsilon}{5})$, ce qui nous donne une valeur pour $f_\epsilon^*(x_\epsilon^*, y_\epsilon^*) = 30 + 12\epsilon + \frac{30}{25}\epsilon^2$. Si l'on néglige les termes en ϵ^2 , nous observons qu'en augmentant g d'un montant ϵ , la valeur optimale de f a augmenté d'environ 12ϵ . Le multiplicateur de Lagrange λ mesure précisément l'augmentation marginale de la valeur de f consécutive à une augmentation marginale de la valeur de g .

Considérons le problème suivant :

$$(P(b)) : \text{Maximiser } f(x, y) \text{ sous contrainte } g(x, y) = b$$

PROPOSITION 13 Supposons que pour tout b , le problème admette une unique solution $(x(b), y(b))$. Soit $v(b)$ la valeur de $f(x(b), y(b))$ et $\lambda(b)$ le multiplicateur de Lagrange associé. Supposons que $v(\cdot)$ soit différentiable en b . Alors

$$\lambda(b) = v'(b)$$

Preuve : Appelons $H(x, y) = f(x, y) - v(g(x, y))$. Alors H atteint son maximum (non contraint) en tout points $(x(b), y(b))$, définis plus hauts. En effet, $f(x, y) \leq v(g(x, y))$ partout, et $H(x(b), y(b)) = v(b) - v(b) = 0$. Puisque H est maximal en $(x(b), y(b))$, nous pouvons écrire les CPO en $(x(b), y(b))$:

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x(b), y(b)) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial H}{\partial y}(x(b), y(b)) = 0$$

Autrement dit,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x(b), y(b)) - v'(b) \frac{\partial g}{\partial x}(x(b), y(b)) &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x(b), y(b)) - v'(b) \frac{\partial g}{\partial y}(x(b), y(b)) &= 0\end{aligned}$$

Par unicité du multiplicateur de Lagrange et identification, nous avons bien

$$v'(b) = \lambda(b)$$

■

REMARQUE 9 On peut également noter le Lagrangien $L(x, \lambda) = f(x) + \lambda g(x)$ et cela n'a aucune incidence si l'on recherche des extrema locaux. L'interprétation des multiplicateurs doit néanmoins être ajustée.

5.1.2 Plusieurs contraintes d'égalité

Lorsque nous cherchons les extrema locaux d'une fonction $f(x)$ avec $x \in \mathbb{R}^n$, sous p contraintes d'égalité de la forme $h_l(x) = 0$ pour $l = 1, \dots, p$, les intuitions précédentes restent vraies.

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 , $h_l : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 pour $l = 1, \dots, p$.

DEFINITION 19 On appelle Lagrangien, noté L , la fonction suivante :

$$L(x, \lambda) = f(x) - \sum_{l=1}^p \lambda_l h_l(x)$$

où les variables λ_l sont appelées multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)$.

DEFINITION 20 Un point $x \in U$ vérifiant $h_l(x) = 0$ pour tout l sera appelé admissible.

Le problème général que l'on se pose dans cette section est de déterminer les extrema locaux (et globaux) de f sous contraintes $h_l = 0$, $l = 1, \dots, p$. Comme on l'a déjà énoncé plus haut dans le chapitre illustratif à une contrainte d'égalité, si un point admissible est un extremum local de f sous contraintes $h = 0$, on peut en déduire qu'il existe un multiplicateur de Lagrange tel que les conditions du premier ordre soit vérifiées, **sous une certaine condition sur la différentielle des contraintes**. Si on ne fait aucune hypothèse supplémentaire, on peut avoir par exemple un minimum local x^* tel qu'il n'existe pas λ^* pour lequel les CPO soient vérifiées.

Dans le cas de contraintes d'égalités, des conditions suffisantes à la qualification des contraintes sont les suivantes :

DEFINITION 21 (Conditions suffisantes de qualification des contraintes) Soit x^* un point admissible. On définit deux propriétés de h_1, \dots, h_p en x^* garantissant que les contraintes sont qualifiées en x^* :

(CQ_{lin}) h_1, \dots, h_p sont linéaires

(CQ_{libre}) la matrice jacobienne $Dh(x^*)$ est de rang p , où

$$Dh(x^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(x^*) & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n}(x^*) \\ \dots & & \dots \\ \frac{\partial h_p}{\partial x_1}(x^*) & \dots & \frac{\partial h_p}{\partial x_n}(x^*) \end{pmatrix}$$

REMARQUE 10 Une matrice A de taille $p \times n$ avec $p \leq n$ est de rang p si et seulement si les p lignes sont linéairement indépendantes.

EXEMPLE 20 Supposons que nous cherchions à maximiser $f(x, y, z)$ sous contraintes que $x + y + z = 1$ et $x - 2y - z = 1$. Alors la condition suffisante (CQ_{lin}) est vérifiée en tout point (x, y, z) . Notons que la condition (CQ_{libre}) est également vérifiée, car

$$Dh(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

qui est de rang 2 pour tout (x, y, z) .

THEOREM 21 (Conditions du premier ordre) Soit x^* un optimum local de f , sous contraintes $h_l(x) = 0$, $l = 1, \dots, p$ et supposons que la condition suffisante qualification soit vérifiée en x^* . Alors il existe un unique $\lambda^* \in \mathbb{R}^p$ tel que x^* vérifie simultanément les conditions suivantes :

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(x^*, \lambda^*) = 0 \text{ pour } i = 1, \dots, n$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_l}(x^*, \lambda^*) = 0 \text{ pour } l = 1, \dots, p$$

c'est à dire

$$Df(x^*) - \sum_l \lambda_l Dh_l(x^*) = 0 \text{ (CPO1)}$$

$$\forall l = 1, \dots, p \quad h_l(x^*) = 0 \text{ (CPO2)}$$

Voici un exemple illustrant le commentaire sur la qualification des contraintes plus haut :

EXEMPLE 21 Sur \mathbb{R}^2 , soit $f(x) = x_1 + x_2$, que l'on maximise sous les contraintes $h_1(x_1, x_2) = x_1^2 + (x_2 - 1)^2 - 1 = 0$ et $h_2(x_1, x_2) = x_1^2 + (x_2 + 1)^2 - 1 = 0$. Clairement le seul point admissible est $(0, 0)$ qui est donc un maximum global de f sous contraintes. D'autre part $Df(x^*) = (1, 1)$, $Dh_1(x^*) = (0, -2)$ et $Dh_2(x^*) = (0, 2)$. Il est donc clair qu'il n'existe pas λ^* tel que

$$Df(x^*) - \lambda_1^* Dh_1(x^*) - \lambda_2^* Dh_2(x^*) = 0$$

Cela est cohérent avec le fait que

$$Dh(x^*) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

n'est pas de rang 2.

Il n'est pas toujours aisé de déterminer si les candidats repérés grâce aux CPO sont des optima ou non. Avant d'énoncer des conditions suffisantes du second ordre, intéressons-nous à un cas relativement courant en économie.

THEOREM 22 (Concavité-convexité) *Supposons que h_1, \dots, h_p soient affines. Supposons de plus qu'il existe un $\lambda^* \in \mathbb{R}^p$ tel que x^* vérifie simultanément les conditions (CPO1) et (CPO2). Alors si la fonction f est concave (resp. convexe) alors le point x^* est un maximum (resp. minimum) global de f sous contraintes.*

EXAMPLE 22 *On veut minimiser $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sous contraintes $x + y + z = 1$ et $x - 2y - z = 1$.*

Les deux contraintes prennent la forme : $h_1(x, y, z) = x + y + z - 1$ et $h_2(x, y, z) = x - 2y - z - 1$. Ces contraintes sont affines (donc (CQ_{lin}) est vérifiée). Formons le Lagrangien : $L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda_1(x + y + z - 1) - \lambda_2(x - 2y - z - 1)$

Les CPO donnent :

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x^*, y^*, z^*, \lambda^*) = 0 \iff 2x^* - \lambda_1^* - \lambda_2^* = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}(x^*, y^*, z^*, \lambda^*) = 0 \iff 2y^* - \lambda_1^* + 2\lambda_2^* = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial z}(x^*, y^*, z^*, \lambda^*) = 0 \iff 2z^* - \lambda_1^* + \lambda_2^* = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1}(x^*, y^*, z^*, \lambda^*) = 0 \iff x^* + y^* + z^* = 1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2}(x^*, y^*, z^*, \lambda^*) = 0 \iff x^* - 2y^* - z^* = 1$$

On écrit x, y et z en fonction de λ_1 et λ_2 , ce qui nous conduit à : $x^ = 13/14$, $y^* = -1/7$, $z^* = 3/14$, $\lambda_1^* = 8/7$ et $\lambda_2^* = 5/7$.*

Nous observons par ailleurs que f est convexe (comme somme de fonctions convexes). Par conséquent, la solution trouvée est le minimum global du problème.

Si le problème n'est ni convexe ni concave, nous avons également des conditions du second ordre locales permettant parfois de conclure quant à la nature des candidats.

THEOREM 23 (Conditions suffisantes du second ordre) Supposons que f est de classe \mathcal{C}^2 . Soit x^* tel qu'une condition suffisante de qualification soit vérifiée. Supposons qu'il existe $\lambda^* \in \mathbb{R}^p$ tel que x^* vérifie simultanément (CPO1) et (CPO2). Si de plus la matrice hessienne du Lagrangien, \mathbf{H}_L , évaluée en (x^*, λ^*) , est définie négative (resp. positive) sur le sous-espace vectoriel engendré par $\{\mathbf{v} : Dh(x^*) \cdot \mathbf{v} = 0\}$, alors x^* est un maximum (resp. minimum) local strict de f sous contraintes.

EXAMPLE 23 Max $f(x, y) = xy$ sous contrainte $x + y = 6$.

Posons $h(x, y) = x + y - 6$ et formons le Lagrangien :

$$L(x, y, \lambda) = xy - \lambda(x + y - 6)$$

La condition suffisante de qualification (CQ_{lin}) est vérifiée.

Les CPO donnent :

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x^*, y^*, \lambda^*) = 0 \iff y^* - \lambda^* = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}(x^*, y^*, \lambda^*) = 0 \iff x^* - \lambda^* = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x^*, y^*, \lambda^*) = 0 \iff x^* + y^* = 6$$

Ce qui nous donne comme unique candidat le point $(x^*, y^*, \lambda^*) = (3, 3, 3)$.

Regardons maintenant la condition du second ordre, en déterminant le sous-espace sur lequel la contrainte est respectée : il s'agit de trouver les vecteurs non nuls \mathbf{v} dans \mathbb{R}^2 tels que $D_g(x^*, y^*)\mathbf{v} = 0$.

$$D_g(x, y)\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = v_1 + v_2$$

Donc \mathbf{v} sont tous les vecteurs non-nuls tels que $v_1 = -v_2$. Calculons maintenant le produit

$$\mathbf{v}^T \mathbf{H}_L(x^*, y^*, \lambda^*) \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 2v_1 v_2$$

Or $v_1 = -v_2$, donc $\mathbf{v}^T \mathbf{H}_L(x^*, y^*, \lambda^*) \mathbf{v} = -2v_1^2 \leq 0$. Remarquez que $v_1 \neq 0$, sinon on aurait $\mathbf{v} = 0$. Par conséquent, $\mathbf{v}^T \mathbf{H}_L(x^*, y^*, \lambda^*) \mathbf{v} < 0$. La condition suffisante est satisfaite, nous avons bien un maximum local.

Remarque : Bien qu'il n'y ait qu'un seul candidat, et que les contraintes sont qualifiées, nous ne pouvons pas pour autant en conclure que le maximum local est global. En effet, l'espace délimité par les contraintes n'est pas compact, donc x et y peuvent être arbitrairement grands. Dans l'exemple présent, il est facile de montrer que le maximum trouvé est global, mais ce n'est pas une conséquence de ce qui précède. Il faut le montrer !

Une condition suffisante qui garantit que la condition sur la hessienne du Lagrangien est satisfaite est la suivante : soit $\mathbf{H}_b(x^*, \lambda^*)$ la matrice hessienne bordée des contraintes :

$$\mathbf{H}_b(x^*, \lambda^*) = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{p \times p} & | & \mathbf{J}(x^*) \\ \mathbf{J}(x^*)^T & | & \mathbf{H}_L(x^*, \lambda^*) \end{pmatrix}$$

où \mathbf{H}_L est la hessienne du Lagrangien. Alors, si les $n - p$ derniers mineurs principaux diagonaux de $\mathbf{H}_b(x^*, \lambda^*)$ alternent de signe, et que le déterminant de $\mathbf{H}_b(x^*, \lambda^*)$ est du signe de $(-1)^n$, alors $\mathbf{v}^T \mathbf{H}_L(x^*, \lambda^*) \mathbf{v} < 0$. En revanche, si les $n - p$ derniers mineurs principaux diagonaux de $\mathbf{H}_L(x^*, \lambda^*)$ sont tous du même signe que $(-1)^p$, alors $\mathbf{v}^T \mathbf{H}_L(x^*, \lambda^*) \mathbf{v} > 0$.

EXEMPLE 24 Reprenons l'exemple précédent : $\text{Max } f(x, y) = xy$ sous contrainte $x + y = 6$.
Regardons cette fois les CSO en formant la hessienne bordée :

$$\mathbf{H}_b(x^*, y^*, \lambda^*) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ici, $n = 2$ et $p = 1$, donc $n - p = 1$, il faut regarder le signe du dernier mineur principal diagonal, qui est le déterminant. Or $\text{Det}(\mathbf{H}_b(x^*, y^*, \lambda^*)) = 2 > 0$, c'est bien du signe de $(-1)^n = 1$, nous pouvons donc conclure que le point $(x, y) = (3, 3)$ est un maximum local.

EXEMPLE 25 Si nous cherchons à minimiser $f(x, y, z) = -x - y - xz - yz$ sous contrainte que $x + y + z = 3$, nous pouvons vérifier que les CSO vérifient les conditions nécessaires (i.e. $\mathbf{v}^T \mathbf{H}_L(x^*, \lambda^*) \mathbf{v} \geq 0$) mais pas les conditions suffisantes (i.e. $\mathbf{v}^T \mathbf{H}_L(x^*, \lambda^*) \mathbf{v} > 0$). Pour savoir si le point extrême trouvé est bien un minimum local, il faut s'y prendre autrement. Voir l'exercice 34.

5.1.3 Exercices

EXERCICE 29 Maximiser $f(x, y) = xy$ sous contrainte que $3x + 4y = k$ avec $k > 0$. Donner la valeur de $f(x, y)$ à son maximum quand $k = 7$ et donner une estimation de la valeur du maximum quand $k = 7.2$. Peut-on donner un estimation quand $k = 10$? Vérifier par le calcul et justifier.

EXERCICE 30 Résoudre

$$\begin{aligned} \max_{x, y} f(x, y) &= \ln x + \ln y \\ \text{s.c. } h(x, y) &= x^2 + y^2 - 2 = 0. \end{aligned}$$

EXERCICE 31 *Mêmes questions avec*

$$\begin{aligned} \min_{x,y,z} f(x,y,z) &= x^2 + y^2 + z^2 \\ \text{s.c.} \\ h_1(x,y,z) &= 3x + y + z = 5 \\ h_2(x,y,z) &= x + y + z = 1 \end{aligned}$$

EXERCICE 32 *Soit le problème d'optimisation*

$$\begin{aligned} \max_{x_1,x_2} f(x_1,x_2) &= x_1^2 x_2 \\ \text{s.c. } h(x_1,x_2) &= 2x_1^2 + x_2^2 - 3 = 0. \end{aligned}$$

Caractériser les points stationnaires de h et vérifier la condition de qualification ; résoudre.

EXERCICE 33 *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : f(x,y) = (x-1)^2 + y^2$. On s'intéresse au problème de minimisation*

$$(\mathcal{P}_\alpha) \min f \text{ sous contrainte } h_\alpha(x) = -x + \alpha y^2 = 0.$$

- 1) *Est-ce un problème convexe ?*
- 2) *Montrer que $(0,0)$ vérifie les conditions du premier ordre ;*
- 3) *Utilisez les conditions du second ordre pour déterminer la nature de $(0,0)$, suivant la valeur de α .*

EXERCICE 34 *Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} : f(x,y,z) = -x - y - yz - xz$. On s'intéresse au problème de minimisation*

$$(\mathcal{P}) \min f \text{ sous contrainte } h(x) = x + y + z - 3 = 0.$$

- 1) *Est-ce un problème convexe ?*
- 2) *Déterminer les points vérifiant les conditions nécessaires du premier ordre ;*
- 3) *Parmi ces points, quels sont ceux vérifiant aussi les conditions nécessaires du second ordre ? Et les conditions suffisantes ?*

EXERCICE 35 *Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : f(x,y) = 3x + 2y$ et $h(x,y) = x^2 + 4y^2 - 10$. Quels sont les extremas de f sous contrainte que $h(x,y) = 0$?*

EXERCICE 36 *Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : f(x,y) = (1+x)(1-y)$. On s'intéresse au problème de maximisation*

$$(\mathcal{P}) \max f \text{ sous contrainte } h(x,y) = x^3 - y^3 = 0.$$

Par une méthode de substitution, quel est le maximum contraint de cette fonction ? La méthode du lagrangien permet-elle de trouver ce maximum contraint ? Pourquoi ?

5.2 Optimisation sous contraintes d'inégalité

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 , $g_k : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 pour $k = 1, \dots, m$. Dans cette section, nous cherchons les extrema locaux de f sous contraintes $g_k \leq 0$.

DEFINITION 22 Soit $x \in U$. Si $g_k(x) = 0$, la contrainte est dite **saturée**, (ou active) en x^* . Si $g_k(x) < 0$, la contrainte est dite non saturée, ou inactive en x .

Considérons un point x^* pour lequel on veut vérifier s'il s'agit d'un optimum. Naturellement, pour chaque contrainte g_k deux cas peuvent se poser en x^* : soit $g_k(x^*) = 0$, soit $g_k(x^*) < 0$. Dans le premier cas, on dit que la contrainte est **saturée**. Dans le second cas, elle est **non saturée**.

Pour chaque contrainte qui est saturée, on est ramené au cas précédent de contraintes sous forme d'égalité. Par conséquent, il y a un multiplicateur de Lagrange μ_k possiblement non-nul qui y est associé. Toutefois, puisque $g_k(x^*) = 0$, on a que $\mu_k^* g_k(x^*) = 0$.

Pour chaque contrainte qui est non saturée, le multiplicateur de Lagrange associé est nul car la contrainte est *inactive*. Par conséquent, nous avons également $\mu_k^* g_k(x^*) = 0$.

Ainsi, dans les deux cas, $\mu_k^* g_k(x^*) = 0$. Ces conditions, ajoutées aux conditions du premier ordre du Lagrangien, constituent les **conditions de Karush, Kuhn et Tucker**.

DEFINITION 23 Dans le cas de contraintes d'inégalités, on appelle Lagrangien, noté L , la fonction suivante :

$$L(x, \lambda) = f(x) - \sum_{k=1}^m \mu_k g_k(x)$$

où les variables μ_k sont appelées multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes d'inégalités, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$.

DEFINITION 24 (Conditions suffisantes de qualification des contraintes d'inégalité)

Soit x^* un point admissible, et soient g_1, \dots, g_p , avec $p \leq m$, l'ensemble des contraintes actives en x^* . On définit trois propriétés de g_1, \dots, g_p en x^* garantissant que les contraintes sont qualifiées en ce point :

(CQ_{lin}) g_1, \dots, g_p sont linéaires

(CQ_{libre}) la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x^*) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(x^*) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_p}{\partial x_1}(x^*) & \dots & \frac{\partial g_p}{\partial x_n}(x^*) \end{pmatrix}$$

est de rang p

(CQ_{sla}) g_1, \dots, g_p sont convexes et il existe x_0 tel que $g_k(x_0) < 0$ pour tout $k = 1, \dots, p$.

REMARQUE 11 Comme précédemment, il ne s'agit ici que de conditions suffisantes.

EXEMPLE 26 On considère le problème

Maximiser $x + 2y$ s.c. $x^2 + y^2 \leq 1$ et $x \geq 0$.

On réécrit les contraintes sous la forme

$$x^2 + y^2 - 1 \leq 0 \text{ et } -x \leq 0.$$

Pour savoir si la condition de qualification est vérifiée, regardons le deuxième critère (les contraintes ne sont pas linéaires). On doit distinguer les cas possibles :

- si seule la contrainte $x^2 + y^2 - 1 \leq 0$ est active, le gradient des contraintes actives est $(2x, 2y)$, qui est non nul (on ne peut pas avoir $x = y = 0$, sinon la contrainte serait inactive) donc de rang 1.
- si seule la contrainte $-x \leq 0$ est active, le gradient des contraintes actives est $(-1, 0)$, qui est non nul donc de rang 1.
- si les deux contraintes sont actives, le gradient des contraintes actives est

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

dont le déterminant est $2y$. Puisque les deux contraintes sont actives, on a $x = 0$ et $x^2 + y^2 = 1$, soit $y = 1$ ou $y = -1$; dans les deux cas, le déterminant de la matrice est non nul donc le gradient des contraintes actives est de rang 2.

Regardons maintenant le troisième critère : $g_1(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ et $g_2(x, y) = -x$ sont deux fonctions convexes. De plus, si on choisit par exemple $(x_0, y_0) = (1/2, 1/2)$, alors $g_1(x_0, y_0) < 0$ et $g_2(x_0, y_0) < 0$. Les contraintes sont donc qualifiées.

THEOREM 24 (Karush-Kuhn-Tucker) Soit x^* un point admissible vérifiant une condition suffisante de qualification. Si x^* est un maximum (resp. minimum) local alors il existe un unique $\mu^* = (\mu_1^*, \dots, \mu_m^*)$ tel que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_i}(x^*, \mu^*) &= 0 \text{ pour tout } i = 1, \dots, n \\ \mu_k^* &\geq 0 \text{ (resp. } \leq 0) \text{ pour tout } k = 1, \dots, m \\ \mu_k^* g_k(x^*) &= 0 \text{ pour tout } k = 1, \dots, m \end{aligned}$$

REMARQUE 12 Ces conditions n'excluent pas que λ_k^* et $g_k(x^*)$ soient nuls simultanément.

En pratique, ces conditions sont difficiles à vérifier, puisqu'il faut analyser tous les cas possibles : aucune contrainte saturée, une seule contrainte saturée, deux contraintes saturées, etc. Il n'y a pas de technique générale qui permette de discriminer parmi les différents cas, c'est donc au cas par cas.

EXAMPLE 27 Reprenons le problème précédent

Maximiser $x + 2y$ s.c. $x^2 + y^2 \leq 1$ et $x \geq 0$.

Nous avons vu que les contraintes étaient qualifiées. Le lagrangien du problème est

$$L(x, y, \mu_1, \mu_2) = x + 2y - \mu_1(x^2 + y^2 - 1) + \mu_2 x.$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x, y, \mu_1, \mu_2) = 1 - 2\mu_1 x + \mu_2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial L}{\partial y}(x, y, \mu_1, \mu_2) = 2 - 2\mu_1 y.$$

Les conditions de Karush-Kuhn-Tucker s'écrivent :

$$\begin{cases} 1 - 2\mu_1^* x^* + \mu_2^* = 0 \\ 2 - 2\mu_1^* y^* = 0 \\ \mu_1^* ((x^*)^2 + (y^*)^2 - 1) = 0, \mu_1^* \geq 0, (x^*)^2 + (y^*)^2 - 1 \leq 0 \\ \mu_2^* x^* = 0, \mu_2^* \geq 0, x^* \geq 0 \end{cases}$$

Pour résoudre ce système, examinons les différentes possibilités : $(\mu_1^*, \mu_2^*) = (0, 0)$, $\mu_1^* = 0$ et $\mu_2^* > 0$, $\mu_1^* > 0$ et $\mu_2^* = 0$, et enfin $\mu_1^* > 0$ et $\mu_2^* > 0$,

De la seconde équation, on déduit que nécessairement μ_1^* est non nul (sinon $2 = 0$). Puisque d'après la troisième condition on a $\mu_1^* ((x^*)^2 + (y^*)^2 - 1) = 0$, cela implique que $(x^*)^2 + (y^*)^2 - 1 = 0$: on a transformé une condition d'inégalité en une condition d'égalité ! Le système se réécrit

$$\begin{cases} 1 - 2\mu_1^* x^* + \mu_2^* = 0 \\ 2 - 2\mu_1^* y^* = 0 \\ \mu_1^* > 0, (x^*)^2 + (y^*)^2 = 1 \\ \mu_2^* x^* = 0, \mu_2^* \geq 0, x^* \geq 0 \end{cases}$$

D'après la quatrième condition, si $\mu_2^* > 0$ alors $x^* = 0$. Dans ce cas, on a grâce à la première équation $\mu_2^* = -1$, ce qui est impossible puisque μ_2^* est strictement positif. On en déduit que $\mu_2^* = 0$ et $x^* > 0$, ce qui donne le système

$$\begin{cases} 1 - 2\mu_1^* x^* = 0 \\ 2 - 2\mu_1^* y^* = 0 \\ \mu_1^* > 0, (x^*)^2 + (y^*)^2 = 1 \\ \mu_2^* = 0, x^* > 0 \end{cases}$$

On peut maintenant résoudre ce système en exprimant x^* et y^* en fonction de μ_1^* dans la première équation :

$$\begin{cases} x^* = \frac{1}{2\mu_1^*} \\ y^* = \frac{1}{\mu_1^*} \\ \mu_1^* > 0, (x^*)^2 + (y^*)^2 = 1 \\ \mu_2^* = 0, x^* > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^* = \frac{1}{2\mu_1^*} \\ y^* = \frac{1}{\mu_1^*} \\ \mu_1^* > 0, (\mu_1^*)^2 = \frac{5}{4} \\ \mu_2^* = 0, x^* > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^* = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ y^* = \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \mu_1^* = \frac{\sqrt{5}}{2} \\ \mu_2^* = 0 \end{cases}$$

Si une solution au problème existe, c'est donc nécessairement $(1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$.

Bien entendu, les conditions du premier ordre de KKT nous donnent uniquement des candidats. Il faut ensuite vérifier si ces candidats sont ceux recherchés, avec des conditions du second ordre. Les conditions du second ordre sont identiques au cas avec contraintes d'égalité, mais restreintes aux contraintes qui sont saturées.

THEOREM 25 (Conditions suffisantes du second ordre) *Supposons que $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est \mathcal{C}^2 . Soit x^* vérifiant une condition suffisante de qualification. Supposons de plus qu'il existe un $\mu^* \in \mathbb{R}^m$ tel que x^* vérifie les conditions de Karush-Kuhn-Tucker, et soit p le nombre de contraintes saturées en x^* . Si de plus la matrice hessienne du Lagrangien construit uniquement avec les contraintes saturées, $\overline{\mathbf{H}}_{\mathbf{L}}$, évaluée en (x^*, λ^*) , est définie négative (resp. positive) pour tout vecteur \mathbf{v} non-nul vérifiant $\overline{Dg}(x^*)\mathbf{v} = 0$, le gradient des contraintes saturées, alors x^* est un maximum (resp. minimum) local contraint strict de f*

Comme précédemment, une condition qui garantit que la condition ci-dessus est vérifiée est la suivante : soit $\overline{\mathbf{H}}_{\mathbf{b}}(x^*, \lambda^*)$ la matrice hessienne bordée des p contraintes saturées uniquement :

$$\mathbf{H}_{\mathbf{b}}(x^*, \lambda^*) = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{p \times p} & | & \overline{\mathbf{J}}(x^*) \\ \overline{\mathbf{J}}(x^*)^T & | & \mathbf{H}_{\mathbf{L}}(x^*, \lambda^*) \end{pmatrix}$$

où $\mathbf{H}_{\mathbf{L}}$ est la hessienne du Lagrangien et $\overline{\mathbf{J}}$ est la jacobienne des contraintes saturées uniquement. Alors, si les $n - p$ derniers mineurs principaux diagonaux de $\mathbf{H}_{\mathbf{b}}(x^*, \lambda^*)$ alternent de signe, et que le déterminant de $\mathbf{H}_{\mathbf{b}}(x^*)$ est du signe de $(-1)^n$, alors $\mathbf{v}^T \mathbf{H}_{\mathbf{b}}(x^*, \lambda^*) \mathbf{v} < 0$. En revanche, si les $n - p$ derniers mineurs principaux diagonaux de $\mathbf{H}_{\mathbf{L}}(x^*, \lambda^*)$ sont tous du même signe que $(-1)^p$, alors $\mathbf{v}^T \mathbf{H}_{\mathbf{L}}(x^*, \lambda^*) \mathbf{v} > 0$.

EXEMPLE 28 *Continuons avec notre exemple et examinons le candidat que nous avons trouvé : $(1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}, \sqrt{5}/2, 0)$. Nous avons $\overline{Dg}(x^*)\mathbf{v} = 0 \iff 2xv_1 + 2yv_2 = 0 \iff 2/\sqrt{5}v_1 + 4/\sqrt{5}v_2 = 0 \iff v_1 = -2v_2$ avec $v_1 \neq 0$.*

Calculons maintenant $\mathbf{v}^T \overline{\mathbf{H}}_{\mathbf{L}} \mathbf{v}$ au point voulu :

$$(v_1, v_2) \begin{pmatrix} -2\lambda_1 & 0 \\ 0 & -2\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = -\sqrt{5}(v_1^2 + v_2^2) < 0$$

Le point que nous avons trouvé est donc bien un maximum.

Appliquons maintenant la seconde méthode : il n'y a qu'une seule contrainte active, donc la hessienne bordée est :

$$H_{\mathbf{b}}(1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}, \sqrt{5}/2, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 2/\sqrt{5} & 4/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & -\sqrt{5} & 0 \\ 4/\sqrt{5} & 0 & -\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Ici, $n - p = 2 - 1 = 1$, il faut donc juste calculer le déterminant, qui vaut $20/\sqrt{5} > 0$. Cette méthode nous indique également qu'il s'agit d'un maximum.

5.2.1 Contraintes mixtes

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 , $g_k, h_l : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 pour $k = 1, \dots, m$ et $l = 1, \dots, p$. Dans cette section, nous cherchons les extrema locaux de f sous contraintes $g_k \leq 0$ et $h_l = 0$.

On forme le Lagrangien associé à ce problème :

$$L(x; \lambda, \mu) = f(x) - \sum_{k=1}^m \mu_k g_k(x) - \sum_l \lambda_l h_l(x)$$

THEOREM 26 (Contraintes mixtes) Soit x^* un point admissible vérifiant une condition suffisante de qualification. Si x^* est un maximum (resp. minimum) local du problème contraint par les inégalités $g_k \leq 0$, $h_l = 0$ alors il existe un unique $\lambda^* = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_p^*)$ et un unique $\mu^* = (\mu_1^*, \dots, \mu_m^*)$ tel que :

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(x^*; \lambda^*, \mu^*) = 0 \text{ pour tout } i = 1, \dots, n$$

$$\mu_k^* \geq 0 \text{ (resp. } \leq 0) \text{ pour tout } k = 1, \dots, m$$

$$\mu_k^* g_k(x^*) = 0 \text{ pour tout } k = 1, \dots, m$$

$$h_l(x^*) = 0, \forall l = 1, \dots, p$$

THEOREM 27 (Conditions suffisantes du second ordre) Supposons que $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est \mathcal{C}^2 . Soit x^* vérifiant une condition suffisante de qualification. Supposons de plus qu'il existe $\lambda^* \in \mathbb{R}^p$ et $\mu^* \in \mathbb{R}^m$ tels que x^* vérifie les conditions de premier ordre ci-dessus, et soit p le nombre de contraintes saturées en x^* . Si de plus la matrice hessienne du Lagrangien construit uniquement avec les contraintes saturées et les contraintes d'égalité, $\overline{\mathbf{H}}_{\mathbf{L}}$, évaluée en (x^*, λ^*, μ^*) , est définie négative (resp. positive) pour tout vecteur \mathbf{v} non-nul vérifiant $\overline{\mathbf{D}}g(x^*)\mathbf{v} = 0$, le gradient des contraintes saturées, alors x^* est un maximum (resp. minimum) local contraint strict de f .

5.2.2 Convexité

Nous pouvons nous passer des conditions de second ordre pour conclure quant à la nature des points vérifiant les CPO, lorsque le problème est concave ou convexe. On doit ainsi définir ce que nous entendons par problème convexe en général. Notez que dans cette section, nous n'avons pas nécessairement besoin que f soit \mathcal{C}^2 .

Soit $C = \{x \in U : g_k(x) \leq 0, h_l(x) = 0 \text{ } k = 1, \dots, m, l = 1, \dots, p\}$.

THEOREM 28 Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe (resp. concave) et soit x^* un minimum (resp. maximum) local de f sous contraintes $g_k \leq 0$, $k = 1, \dots, m$. Supposons que C (défini ci-dessus) est un ensemble convexe. Alors x^* est un minimum (resp. maximum) **global** de f sous contraintes.

DEFINITION 25 On dira que $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ est quasi-convexe si l'on a

$$\forall c \in \mathbb{R}, \{x \in U : g(x) \leq c\}$$

est un ensemble convexe.

PROPOSITION 14 Soit $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 . Alors g est quasi-convexe ssi

$$\forall x, y \in U, g(y) \leq g(x) \Rightarrow \langle Dg(x), y - x \rangle \leq 0.$$

Bien entendu, une fonction convexe est quasi-convexe.

DEFINITION 26 On dira qu'un problème de minimisation $\min_{x \in U} f(x)$ sous contraintes mixtes $g_k \leq 0$, $k = 1, \dots, m$, $h_l = 0$, $l = 1, \dots, p$ est convexe (resp. concave) si f est convexe (resp. concave), g_k est quasi-convexe et h_l est affine.

Si le problème est convexe, alors C est convexe.

THEOREM 29 (Conditions suffisantes du premier ordre pour problèmes convexes)

Supposons que le problème est convexe. Soit x^* tel que la contrainte de qualification soit vérifiée. Supposons de plus qu'il existe $\lambda^* \in \mathbb{R}^p$ et $\mu^* \in \mathbb{R}^m$ tel que x^* vérifie les conditions du premier ordre. Si de plus :

- f est une fonction concave et $\mu_k^* \geq 0$ alors x^* est un maximum global
- f est une fonction convexe et $\mu_k^* \leq 0$ alors x^* est un minimum global

Preuve. Il suffit de vérifier le second point, qui est équivalent au premier. De plus on doit juste montrer que x^* est un minimum local, grâce au précédent théorème qui nous assure qu'alors il s'agit d'un maximum global.

Soit x un point admissible. Puisque x^* vérifie les CPO et que f est convexe, on a

$$f(x) - f(x^*) \geq \langle Df(x^*), x - x^* \rangle = - \sum_{k: g_k(x^*)=0} \mu_k^* \langle Dg_k(x^*), x - x^* \rangle - \sum_l \lambda_l^* \langle Dh_l(x^*), x - x^* \rangle$$

Puisque les h_l sont affines et que $h_l(x^*) = h_l(x) = 0$, on a $\langle Dh_l(x^*), x - x^* \rangle = h_l(x) - h_l(x^*) = 0$.

Par quasi-convexité des fonctions g_k et puisque $g_k(x) \leq 0 = g_k(x^*)$, on a aussi $\langle Dg_k(x^*), x - x^* \rangle \leq 0$. Ainsi $f(x) \geq f(x^*)$ et x^* est un minimum global.

5.2.3 Exercices

EXERCICE 37 Soit $a \in \mathbb{R}^n$. On note $U = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$

$$f_a : U \rightarrow \mathbb{R}, f_a(x) := -\ln(1 - \|x\|^2) + \langle a | x \rangle.$$

- 1) Montrer que f_a est strictement convexe sur U .
- 2) On considère le problème de minimisation suivant :

$$(P_a) \min_{C_a} f_a, \text{ où } C_a = \left\{ x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq \frac{1}{2}, \langle a | x \rangle \leq 0 \right\}.$$

- a. Montrer qu'il s'agit d'un problème de minimisation convexe.
- b. Résoudre le problème avec $a = 0$.
- c. On suppose à partir de maintenant que $a \neq 0$. Soit $\hat{x}(a)$ la solution de (P_a) . Montrer que l'on a nécessairement $\langle a | \hat{x}(a) \rangle < 0$ (et donc que le multiplicateur de Lagrange associé à cette contrainte est égal à 0)
- d. Supposons maintenant que $\|a\| \geq 4/3$. Résoudre en supposant que $\|\hat{x}(a)\| = 1/2$ (autre contrainte saturée).

EXERCICE 38 Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = (x_1 - 2)^2 + 2(x_2 - 1)^2$. On s'intéresse au problème

$$\min f \text{ sous contrainte } g_1(x) = x_1 + 4x_2 - 3 \leq 0, x_2 - x_1 \leq 0.$$

- 1) S'agit-il d'un problème de minimisation convexe ?
- 2) Déterminer l'ensemble des solutions s'il n'y a pas de contrainte, c'est à dire $\text{Argmin}_{x \in \mathbb{R}^2} f(x)$.
- 3) Donner un argument simple permettant d'affirmer que les contraintes sont qualifiées en tout point.
- 4) Résoudre le problème sous contraintes.

EXERCICE 39 Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f_a : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = x_1^2 + ax_2^2 + x_1x_2 + x_1$. On s'intéresse au problème de minimisation

$$(\mathcal{P}_a) \min f \text{ sous contrainte } g(x) = x_1 + x_2 - 1 \leq 0.$$

- 1) Expliquez brièvement pourquoi la condition de qualification des contraintes est vérifiée en tout point.
- 2) Pour quelles valeurs de a la fonction f_a est-elle convexe ? Strictement convexe ?
- 3) On suppose que $a \geq 1/3$. Pour quelle(s) valeur(s) de $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ la différentielle de f_a s'annule ? En déduire l'ensemble des solutions du problème (\mathcal{P}_a) (c'est à dire l'ensemble des \hat{x} minimisant le problème de minimisation).
- 4) On suppose maintenant que $1/4 < a < 1/3$. Quel est alors l'ensemble des solutions de (\mathcal{P}_a) ?

Soit un problème d'optimisation dans \mathbb{R}^n sous contraintes d'inégalités $h_i \leq 0$ et x admissible. Si il existe $y_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que, pour tout i tel que g_i soit saturée en x , on a $\langle Dg_i(x), y_0 \rangle < 0$, alors les contraintes sont qualifiées en x .

EXERCICE 40 Soit

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{3}{2}(x_1 + 2)^2 - x_2.$$

On s'intéresse au problème de minimisation

$$\min f \text{ sous contrainte } g_1(x) = x_2 - (x_1)^3 \leq 0, g_2(x) = x_2 \leq 0.$$

On admet que $C := \{x : g_1(x) \leq 0, g_2(x) \leq 0\}$ est un ensemble convexe (faire un dessin).

- 1) Soit x admissible (vérifiant les contraintes d'inégalité) tel que $x_1 \neq 0$. Donner un argument simple pour montrer que les contraintes sont qualifiées en x .
- 2) Soit x admissible tel que $x_1 = 0$. Montrer qu'il existe $y_0 \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\langle \nabla g_i(x) | y_0 \rangle < 0, i = 1, 2.$$

- 3) En déduire que les contraintes sont qualifiées en tout point admissible.
- 4) Trouver la (ou les) solution(s) du problème.

EXERCICE 41 Résoudre :

$$\begin{aligned} \max u(x, y) &= x^2 + y^2 \\ \text{s.c. } 2x + y &\leq 2; x \geq 0; y \geq 0 \end{aligned}$$

EXERCICE 42 Soit $f(x, y) = -x - 2y - 2xy + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$ et $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$.

1. La fonction f est-elle convexe, concave ?
2. Donnez un argument simple permettant d'affirmer que f admet (au moins) un maximum et un minimum sur C , mais qu'aucun de ces extrema locaux ne se trouve à l'intérieur de C .
3. les déterminez les extrema locaux de f , à l'aide des conditions de premier ordre.

EXERCICE 43 Résoudre :

$$\begin{aligned} \min u(x, y) &= 2y - x^2 \\ \text{s.c. } x^2 + y^2 &\leq 1; x \geq 0; y \geq 0 \end{aligned}$$

EXERCICE 44 *Résoudre :*

$$\begin{aligned} \max u(x, y) &= 2y^2 - x \\ \text{s.c. } x^2 + y^2 &\leq 1; x \geq 0; y \geq 0 \end{aligned}$$

Dans les deux exercices suivants, on considère un jeu donné par un ensemble de joueurs $N = \{1, \dots, n\}$, un ensemble d'actions pour chaque joueur $X_i \subset \mathbb{R}$, et une fonction d'utilité u_i pour chaque joueur, avec $u_i : X \rightarrow \mathbb{R}$, où $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$.

On note $x_{-i} = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$. Étant donné x_{-i} , on note $Br_i(x_{-i})$ l'ensemble de meilleures réponses du joueur i , c'est à dire $Br_i(x_{-i}) := \text{Argmax}_{x_i \in X_i} u_i(x_i, x_{-i})$.

Un vecteur (x_1^*, \dots, x_n^*) est un équilibre de Nash si

$$x_i^* \in Br_i(x_{-i}^*), \forall i = 1, \dots, n.$$

Notation : pour $a \in \mathbb{R}$, on note $a_+ = \max\{a, 0\}$.

EXERCICE 45 **Cournot avec un coût fixe** On considère le modèle de duopole à la cournot suivant : il y a deux joueurs : La firme 1 et la firme 2 produisent des quantités $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$ d'un bien homogène. C'est à dire que $X_1 = X_2 = [0, +\infty[$. Soit $p(x_1, x_2) = (2 - x_1 - x_2)_+$. Les fonctions d'utilité des deux firmes sont données par :

$$u_1(x_1, x_2) = x_1 \times p(x_1, x_2) - x_1; \quad u_2(x_1, x_2) = \begin{cases} x_2 \times p(x_1, x_2) - x_2 - d & \text{si } x_2 > 0 \\ 0 & \text{si } x_2 = 0. \end{cases}$$

1. Déterminer la fonction de meilleure réponse de la firme 1 ;
2. Soit $0 \leq x_1 \leq 1$.
 - 2.1) Déterminer la valeur de q_2 qui maximise la fonction $x_2 \in]0, +\infty[\mapsto u_2(q_1, q_2)$; puis calculer $\max_{q_2 > 0} u_2(x_1, x_2)$
 - 2.2) Utiliser la question précédente pour déterminer $BR_2(x_1)$, suivant la valeur de d .
3. A quelle condition sur d existe-t-il un équilibre de Nash (x_1^*, x_2^*) tel que $x_1^* > 0$ et $x_2^* > 0$?
4. A quelle condition sur d existe-t-il un équilibre de Nash (x_1^*, x_2^*) tel que $x_1^* > 0$ et $x_2^* = 0$?
5. A quelle condition sur d existe-t-il un équilibre de Nash (x_1^*, x_2^*) tel que $x_2^* > 0$ et $x_1^* = 0$?

EXERCICE 46 (**Cournot avec coûts hétérogènes**) On considère le modèle de cournot avec deux firmes et coûts hétérogènes : il y a deux joueurs : La firme 1 et la firme 2, qui produisent des quantités $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$ d'un bien homogène. C'est à dire que $X_1 = X_2 = [0, +\infty[$. Soient $a, b > 0$ et $p(x_1, x_2) = (a - b(x_1 + x_2))_+$. Les fonctions d'utilité des deux firmes sont données par :

$$u_i(x_1, x_2) = x_i \times p(x_1, x_2) - c_i x_i,$$

avec $0 < c_1 < c_2 < a$.

1. Déterminer les fonctions de meilleures réponse des deux firmes.
2. Déterminer sous quelle condition sur a , c_1 et c_2 il existe un équilibre de Nash (x_1^*, x_2^*) tel que $x_1^* > 0$ et $x_2^* > 0$.
3. Déterminer le ou les équilibres de Nash lorsque cette condition n'est pas vérifiée.