Eléments de mathématiques

S. Bervoets - M. Faure

Table des matières

Chapitre 1

Eléments de Logique, raisonnements

Man : Oh look, this isn't an argument.

Arguer : Yes it is.

M : No, it isn't. It's just contradiction.

A : No, it isn't.

M : It is !

A : It is not.

M : Look, you just contradicted me.

A : I did not.

M : Oh, you did ! !

A : No, no, no.

M : You did just then.

A : Nonsense !

M : Oh, this is futile !

A : No, it isn't.

M : I came here for a good argument.

A : No, you didn't ; no, you came here for an argument.

M : An argument isn't just contradiction.

A : It can be.

M : No, it can't. An argument is a connected series of statements intended to establish a proposition.

A : No, it isn't.

M : Yes it is ! It's not just contradiction.

A : Look, if I argue with you, I must take up a contrary position.

M : Yes, but that's not just saying 'No, it isn't.'

A : Yes, it is !

M : No, it isn't !

A : Yes, it is !

M : Argument is an intellectual process. Contradiction is just the automatic gainsaying of any statement the other person makes.

(short pause)

A : No, it isn't.

Mathematics consist in making *precise* statements and proving whether they are true or false. A *proof* is a series of arguments that are logically *valid*, and that lead from some premise to a conclusion. Premises are *propositions* or *assertions*, while the conclusion is the statement. A statement that is true is a *theorem*.

Some arguments are correct, some are not.

If it is snowing, then it is cold outside.
It is snowing.
Therefore, it is cold outside.

If it is snowing, then it is cold outside.
It is cold outside .
Therefore, it is snowing.

Either you are an Olympique de Marseille fan or a Paris Saint Germain fan.
You are not a PSG fan.
Therefore, you are an Olympique de Marseille fan.

All humans are green.
Some green things are edible
Therefore, some humans are edible.

All humans are green.
Some green things are not edible .
Therefore, some humans are not edible.

All glorphs are wibbles
All wibbles are fnoffles.
Therefore, all glorphs are fnoffles.

All glorphs are wibbles
Some wibbles are fnoffles.
Therefore, some glorphs are fnoffles.

Some politicians are cheaters
No woman cheats
Therefore, no women is a politician

If it has rained, then the grass is wet
The grass is wet

Therefore, it has rained.

The objective of this section is to classify which arguments are correct and which are not, and to know which tools can be used to prove that statements are true or false.

A last example : A logician and his friend.
- Logician : "I just had a baby"
- Friend : "Congratulations ! Is it a boy or a girl ?"
- Logician : "Yes"

1.1 Calcul propositionnel

1.1.1 Définition d'une proposition

Une *proposition* (ou *assertion*) est un énoncé pouvant être vrai ou faux mais pas les deux en même temps. On utilise en général les lettres P, Q, R etc. pour désigner les propositions. Exemples :
- *Il pleut.*
- *Je suis plus grand que toi.*
- $2+2=4$
- $2\times 3=7$
- $x^2 \geq 0$

L'énoncé de la dernière proposition dépend de x. On va alors écrire $P(x) : x^2 \geq 0$.
- *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $P(x)$.
- $P(x,y) : x+y>2$
- $P(x,y,z,n) :\ x^n + y^n = z^n$
- *Il n'existe pas de* $x,y,z,n \in (\mathbb{N}^*)^4$, $n \geq 3$ *tels que* $P(x,y,z,n)$

La dernière proposition est le théorème de Fermat. A partir d'une ou plusieurs propositions, on peut en construire d'autres, en utilisant des *connecteurs*. Le statut (vrai ou faux) de la nouvelle proposition se déduit d'une *table de vérité*.
Nous allons définir 5 connecteurs logiques permettant de construire des propositions complexes. Pour illustrer, supposons que

P : "J'aime les mathématiques"
Q : "J'aime l'économie"

$\overline{P}$: "Je n'aime pas les mathématiques"
$P \wedge Q$: "J'aime les mathématiques et j'aime l'économie"
$P \vee Q$: "J'aime les mathématiques ou l'économie"
$P \implies Q$: "Si j'aime les mathématiques, alors j'aime l'économie"
$P \iff Q$: "J'aime les mathématiques si et seulement si j'aime l'économie"

1.1.2 Les connecteurs logiques « et » et « ou »

Soient P et Q deux propositions. On peut définir la proposition « P et Q », notée $P \wedge Q$ par la table de vérité ci-dessous.

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Par exemple si P est l'assertion *Cette carte est un as* et Q l'assertion *Cette carte est cœur* alors l'assertion P *et* Q est vraie si la carte est l'as de cœur et est fausse pour toute autre carte.

On définit aussi la proposition « P ou Q », notée $P \vee Q$, par la table de vérité suivante :

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Si P est l'assertion *Cette carte est un as* et Q l'assertion *Cette carte est cœur* alors l'assertion P *ou* Q est vraie si la carte est un as ou bien un cœur (en particulier elle est vraie pour l'as de cœur).

COMMENTAIRE **1**
- *On peut noter que $P \vee Q$ est fausse si et seulement si P et Q sont fausses alors que $P \wedge Q$ est vraie si et seulement si P et Q sont vraies.*
- *Il existe en français deux significations du mot « ou ». Il y a le « ou exclusif » qui signifie « soit l'un, soit l'autre, mais pas les deux » et le « ou inclusif » qui signifie « soit l'un, soit l'autre, soit les deux ». $\vee$ est le « ou inclusif ».*

1.1.3 Négation d'une proposition

Soit P une proposition. On définit sa négation, notée $\overline{P}$ (ou aussi non$P$ ou $\rceil P$), à partir de sa table de vérité.

P	$\overline{P}$
V	F
F	V

Cette simple table contient en germe un très grand nombre d'erreurs de raisonnement à venir et ceci dans à peu près tous les chapitres. On doit déjà avoir conscience que la négation de « ce chat est blanc » est, non pas « ce chat est noir », mais tout simplement « ce chat n'est pas blanc » ou que le contraire de la phrase « f est la fonction nulle » est, non pas « f ne s'annule pas », mais « f n'est pas la fonction nulle » ou encore « f ne s'annule pas en au moins un point ». Enfin, le contraire de la phrase « $x \geqslant 0$ » est « $x < 0$ », et non pas « $x \leqslant 0$ ».

1.1.4 Implication logique $\Longrightarrow$

Si P et Q sont deux propositions, on définit l'implication logique $P \Rightarrow Q$ par sa table de vérité.

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

L'assertion $P \Longrightarrow Q$ se lit en français P *implique* Q.
Elle se lit souvent aussi *si P est vraie alors Q est vraie* ou *si P alors Q*.

Par exemple :

- $0 \leq x \leq 25 \Longrightarrow \sqrt{x} \leq 5$ est vraie (prendre la racine carrée).
- $x \in]-\infty, -4[\Longrightarrow x^2 + 3x - 4 > 0$ est vraie (étudier le binôme).
- $\sin(\theta) = 0 \Longrightarrow \theta = 0$ est fausse (regarder pour $\theta = 2\pi$ par exemple).
- $2 + 2 = 5 \Longrightarrow \sqrt{2} = 2$ est vraie ! Eh oui, si P est fausse alors l'assertion $P \Longrightarrow Q$ est toujours vraie.

Illustrons pourquoi « (Faux $\Rightarrow$ Faux) est vraie ».

Vérifions que, pour tout entier naturel n, $[(10^n+1 \text{ divisible par } 9) \Rightarrow (10^{n+1}+1 \text{ divisible par } 9)]$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. La condition « $10^n + 1$ divisible par 9 » fournit un entier naturel K tel que $10^n + 1 = 9K$. Maintenant, puisque

$$10^{n+1} + 1 = 10 \times 10^n + 1 = 10 \times (10^n + 1) - 10 + 1 = 10 \times (10^n + 1) - 9 = 10 \times 9K - 9 = 9(10K - 1),$$

on obtient comme conséquence de l'hypothèse initiale le fait que l'entier $10^{n+1}+1$ est divisible par 9. L'implication proposée est totalement exacte et pourtant, aucune des deux phrases encadrant cette implication ne sont vraies (puisque les nombres 2, 11, 101, 1001... ne sont à l'évidence pas divisibles par 9). D'ailleurs, en écrivant cette implication, nous ne nous sommes *jamais* demandé si la première phrase écrite était vraie. Ceci sera crucial pour comprendre le raisonnement par récurrence (voir section suivante sur les types de raisonnements).

Illustrons maintenant pourquoi « (Faux ⇒ Vrai) est vraie ».

$$2 = 3 \text{ et } 2 = 1 \Rightarrow 2+2 = 3+1 \Rightarrow 4 = 4.$$

L'affirmation de départ est fausse et on en déduit (tout à fait par hasard mais par un raisonnement tout à fait juste) une affirmation vraie. L'affirmation finale est vraie, mais **ce ne sont pas les implications écrites qui la démontrent**.

Une conséquence importante est que, si votre hypothèse de départ est fausse, bien que par la suite vous teniez des raisonnements entièrement justes, vous n'avez aucune idée en fin de raisonnement de la véracité ou de la fausseté des conclusions auxquelles vous êtes parvenu(e). Conclusion : pour qu'une preuve soit correcte, il faut à la fois que les hypothèses soient correctes ET que les implications qui en découlent soient correctes. C'est pourquoi TOUS les théorèmes sont vrais sous certaines hypothèses qu'il convient de bien connaître !

Attention : Une erreur très fréquente consiste à penser que $P \implies Q$ est la même chose que $Q \implies P$. "Il pleut" implique que "l'herbe est mouillée". Mais "l'herbe est mouillée" n'implique PAS qu'il a plu. Elle peut être mouillée pour d'autres raisons. On peut voir avec les tables de vérité où les deux implications diffèrent.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	V	F
F	F	V	V

On voit par exemple que si Q est vrai et P est faux, alors $P \implies Q$ est vrai tandis que $Q \implies P$ est faux.

1.1.5 Equivalence logique $\iff$

DÉFINITION 1. Deux propositions équivalentes P et Q sont deux propositions simultanément vraies et simultanément fausses.

En termes logiques, P et Q sont équivalentes si elles ont **les mêmes valeurs de vérité**.

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Vous devez lire en première ligne de ce tableau que si les propositions P et Q sont vraies, la proposition $P \Leftrightarrow Q$ est vraie, et en deuxième ligne, que si P est vraie et Q est fausse, $P \Leftrightarrow Q$ est fausse.
L'équivalence logique joue pour les propositions le même rôle que joue l'égalité pour les nombres. Les expressions $3+2$ et 5 ne sont pas identiques et pourtant on écrit $3+2=5$. De même, les propositions $(x^2 = 1)$ et $(x = 1 \text{ ou } x = -1)$ ne sont pas identiques et pourtant on écrit $(x^2 = 1) \Leftrightarrow (x = 1 \text{ ou } x = -1)$.

Remarque : Si $A \iff B$, alors $\overline{A} \iff \overline{B}$.

1.1.6 Démonstration avec les tables de vérité

A partir de ces 5 connecteurs et de leur table de vérité, il est possible de démontrer qu'une proposition est vraie ou fausse, une fois admis les prémisses. Il suffit de construire les propositions à démontrer et regarder leur colonne dans la table.

Théorème 1. Soit P une proposition. $\overline{\left(\overline{P}\right)} \Leftrightarrow P$.

Exemple : $P : x > 2$. Alors $\overline{P} : x \leq 2$. Et $\overline{\left(\overline{P}\right)} > 2$

Démonstration.

P	$\overline{P}$	$\overline{\left(\overline{P}\right)}$
V	F	V
F	V	F

Il est clair que $\overline{\left(\overline{P}\right)}$ et P ont les mêmes valeurs de vérité. ❏

Théorème 2. Soient P et Q deux propositions. $\overline{P \wedge Q} \Leftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q}$ et $\overline{P \vee Q} \Leftrightarrow \overline{P} \wedge \overline{Q}$.

(Le contraire de « et » est « ou » et le contraire de « ou » est « et »).

Exemple : $P : x > 2$, $Q : x > 3$. Alors $P \wedge Q : x > 3$, donc $\overline{P \wedge Q} : x \leq 3$. De même $\overline{P} \vee \overline{Q} : x \leq 2 \vee x \leq 3$, donc $\overline{P} \vee \overline{Q} : x \leq 3$

Egalement, $P \vee Q : x > 2$, donc $\overline{P \vee Q} : x \leq 2$. Et $\overline{P} \wedge \overline{Q} : x \leq 2 \wedge x \leq 3$, donc $\overline{P} \wedge \overline{Q} : x \leq 2$

Démonstration. On démontre ces équivalences à l'aide de tables de vérité.

P	Q	$P \wedge Q$	$\overline{P \wedge Q}$	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$\overline{P} \vee \overline{Q}$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

P	Q	$P \vee Q$	$\overline{P \vee Q}$	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$\overline{P} \wedge \overline{Q}$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V

Dans chaque table, on lit effectivement les mêmes valeurs de vérité dans les quatrième et septième colonnes. ❏

Théorème 3. Soient P et Q deux propositions. $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{P} \vee Q)$.

Exemple : P : "Il pleut", Q : "L'herbe est mouillée". Si $P \implies Q$, alors soit il ne pleut pas (auquel cas on ne peut rien dire sur l'herbe), soit il pleut, auquel cas l'herbe est mouillée. Donc $(P \implies Q) \implies (\overline{P} \vee Q)$. Il en va de même pour l'implication inverse.

Démonstration. $P \Rightarrow Q$ est fausse dans l'unique cas où P est vraie et Q est fausse ou encore quand $\overline{P}$ et Q sont toutes deux fausses. $P \Rightarrow Q$ a donc les mêmes valeurs de vérité que $\overline{P} \vee Q$. Rédigez la table pour vous en convaincre. ❏

Théorème 4. (Propositions équivalentes) Soient P et Q deux propositions.

Alors, $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P))$.

Démonstration.

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V

❏

C'est un moment important. **Une équivalence signifie deux implications, l'une de « gauche à droite » et l'autre de « droite à gauche »**.

Quand vous écrivez $P \Leftrightarrow Q$, vous devez être convaincu que la proposition de gauche P entraîne la proposition de droite Q et aussi que la proposition de droite Q entraîne la proposition de gauche P.

Théorème 5. (Négation d'une implication) Soient P et Q deux propositions.

$$\overline{P \Rightarrow Q} \Leftrightarrow P \wedge \overline{Q}.$$

Exemple : $P : x > 2$, $Q : x > 3$. Alors $P \implies Q$ est faux, donc $\overline{P \implies Q}$. On peut trouver x tel que $x > 2$ et $x \leq 3$, donc $P \wedge \overline{Q}$.

Exemple : La négation de "S'il pleut je vais au cinéma" n'est donc pas "S'il pleut je ne vais pas au cinéma", c'est "Il pleut et je ne vais pas au cinéma".

Démonstration. On peut écrire les tables de vérité. On peut aussi remarquer qu'on a :

$$\overline{P \Rightarrow Q} \Leftrightarrow \overline{\overline{P} \vee Q} \Leftrightarrow \overline{\overline{P}} \wedge \overline{Q} \Leftrightarrow P \wedge \overline{Q}.$$

❏

DÉFINITION 2. (Contraposée d'une implication)
Soient P et Q deux propositions. L'implication $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ s'appelle la **contraposée** (ou l'implication contraposée) de l'implication $P \Rightarrow Q$.

Exemple : $P : x > 2$, $Q : x > 1$. Alors $P \implies Q$ est vrai, et pour le montrer, c'est équivalent de montrer que $x \leq 1$ implique $x \leq 2$.

La contraposée d'une implication est équivalente à celle-ci. Ceci fournira plus loin un type de raisonnement usuel : le raisonnement par contraposition.

Théorème 6. (Contraposée d'une implication) Soient P et Q deux propositions.

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}).$$

Démonstration. La table de vérité est :

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

❏

DÉFINITION 3. (Réciproque d'une implication)
Soient P et Q deux propositions. L'implication $Q \Rightarrow P$ s'appelle la **réciproque** (ou l'implication réciproque) de l'implication $P \Rightarrow Q$.

Attention, une erreur souvent commise consiste à penser que si $P \Rightarrow Q$, alors $Q \Rightarrow P$. Ceci est FAUX ! Exemple : $x > 3 \implies x > 2$. Or $x > 2$ n'implique PAS $x > 3$.
Regardons les tables de vérité pour s'en convaincre.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	V	F
F	F	V	V

Les deux colonnes ne sont pas identiques. ❑

La négation de $(P \Rightarrow Q)$ est $(P \wedge \overline{Q})$.
La contraposée de $(P \Rightarrow Q)$ est $(\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$.
La réciproque de $(P \Rightarrow Q)$ est $(Q \Rightarrow P)$.

Par exemple, (pour $n \geq 2$), l'implication (I) : (n premier et $n \neq 2$) $\Rightarrow$ (n impair) est vraie.

- La contraposée de l'implication (I) est : (n pair) $\Rightarrow$ ($n = 2$ ou n non premier) et est (obligatoirement) vraie.
- La réciproque de l'implication (I) est : (n impair) $\Rightarrow$ (n premier et $n \neq 2$) et est fausse (puisque 9 n'est pas premier).
- Enfin, la négation de l'implication (I) dit qu'on peut trouver n tel que (n premier et $n \neq 2$ et n est pair). Cette négation est (obligatoirement) fausse.

1.1.7 C.N.S., ssi, il faut et il suffit

Les expressions « Condition nécessaire et suffisante (CNS) », « si et seulement si (ssi) », « il faut et il suffit » signifient toutes « logiquement équivalent » ou encore « $\Leftrightarrow$ ». Mais plus précisément, dans chacune de ces expressions, quel morceau correspond à « $\Rightarrow$ » et quel autre morceau correspond à « $\Leftarrow$ » ? La réponse est fournie par le tableau suivant :

$\Rightarrow$	$\Leftarrow$
condition nécessaire	condition suffisante
il faut	il suffit
seulement si	si

Exemple 1 : considérons $P : x > 2$ et $Q : x > 3$. Alors pour que Q soit vrai, il est *nécessaire* que P soit vrai. Pour que P soit vrai, il *suffit* que Q soit vrai (mais ce n'est pas nécessaire). On peut aussi dire "$x > 3$ seulement si $x > 2$" et "$x > 2$ si $x > 3$".

Exemple 2 : considérons par exemple l'implication vraie : ($n \geqslant 3$ et n premier) $\Rightarrow n$ impair. Si on cherche à l'énoncer dans le langage courant, on dira : pour que n soit un nombre premier supérieur ou égal à 3, il est nécessaire, il est obligatoire, il faut que n soit impair, mais on peut dire aussi que n peut être un nombre premier supérieur ou égal à 3 seulement si n est impair.
Mais si l'on considère l'implication contraire (qui est fausse) à savoir : n impair $\Rightarrow$ ($n \geqslant 3$ et n premier), on dira que pour que n soit un nombre premier supérieur ou égal à 3, il n'est pas suffisant, il ne suffit pas que n soit impair ou encore, si n est impair, n n'est pas nécessairement un nombre premier supérieur ou égal à 3.

Considérons encore l'implication vraie : $(x+1)^2 = 9 \Leftarrow x+1 = 3$. Pour que $(x+1)^2$ soit égal à 9, il suffit, il est suffisant que $x+1$ soit égal à 3, ou encore $(x+1)^2$ vaut 9 si $x+1$ vaut 3. Mais, pour que $(x+1)^2$ soit égal à 9, il n'est pas nécessaire, il n'est pas obligatoire que $x+1$ soit égal 3 (car $x+1$ peut aussi être égal à -3) ou encore l'égalité $(x+1)^2 = 9$ ne se produit pas seulement si $x+1$ vaut 3 (l'implication $(x+1)^2 = 9 \Rightarrow x+1 = 3$ est fausse).

1.1.8 Exercices

1- Soient P, Q et R trois propositions. Démontrer les équivalences logiques suivantes

• $(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$
• $(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$.
• $(P \wedge Q) \vee R \Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$
• $(P \vee Q) \wedge R \Leftrightarrow (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$.
• $((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$.

2- Démontrer que $(1 = 2) \Longrightarrow (2 = 3)$.

3- Donner la définition du "ou" exclusif.

4- Écrire la négation des assertions suivantes où P, Q, R, S sont des propositions.

• $P \Rightarrow Q$
• P et non Q

• P et (Q et R)
• P ou (Q et R)
• (P et Q) $\Rightarrow$ ($R \Rightarrow S$).

5- La proposition $\big(P \wedge Q \Rightarrow (\neg P) \vee Q\big)$ est-elle vraie ?

6- On suppose que la proposition P est vraie ainsi que les propositions suivantes :

1. $(\neg Q) \wedge P \Rightarrow \neg S$.
2. $S \Rightarrow (\neg P) \vee Q$.
3. $P \Rightarrow R \vee S$.
4. $S \wedge Q \Rightarrow \neg P$.
5. $R \wedge \neg(S \vee Q) \Rightarrow T$.
6. $R \Rightarrow (\neg P) \vee (\neg Q)$.

La proposition T est-elle vraie ?

7- Donner la négation des phrases suivantes :

• S'il fait beau j'irai à la plage
• Tous les habitants de la rue du Havre qui ont les yeux bleus gagneront au loto et prendront leur retraite avant 50 ans.
• tout triangle rectangle possède un angle droit
• dans toutes les écuries, tous les chevaux sont noirs

8- Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

• Si $x^2 > 1$ alors $x > 1$
• Si $x < -1$ alors $x^2 > 1$
• $x^2 > 1$ si $x < -1$
• $x > 1$ si et seulement si $x^2 > 1$

1.2 Les quantificateurs

An economist, a physicist and a mathematician are in a train in Scotland when they see a black sheep in a field.
- Economist : "Oh ! Sheeps in Scotland are black !"
- Physicist : "Well, at least some sheeps are black"
- Mathematician : "No, there exists a field in which there is a sheep, of which at least one side is black !"

1.2.1 Définition

On a vu qu'il est possible de dire d'une proposition P si elle est vraie ou fausse. En revanche, lorsqu'une proposition dépend d'une ou plusieurs variables ($P(x)$, $P(x,y)$, ...), dire qu'elle est vraie ou fausse n'a pas de sens, puisque ça dépend de la valeur des variables. Par exemple, P : "$2>3$" est fausse, tandis que Q : "$3>2$" est vraie. En revanche, $P(x)$: "$x^2>1$" est vraie si $x \in \mathbb{R} \setminus]-1,1[$, fausse sinon. Il faut donc être précis dans les énoncés.

Le quantificateur $\forall$: "pour tout"

La proposition : « Pour tous les éléments x de E, la proposition $P(x)$ est vraie » s'écrit :

$$« \ \forall x \in E,\ P(x) \ ».$$

Par exemple :
- $\forall x \in [1,+\infty[\quad (x^2 \geq 1)$ est une assertion vraie.
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad (x^2 \geq 1)$ est une assertion fausse.
- $\forall n \in \mathbb{N} \quad n(n+1)$ est divisible par 2 est vraie.

Le quantificateur $\exists$: "il existe"

La proposition : « il existe au moins un élément x de E tel que la proposition $P(x)$ est vraie » s'écrit :

$$« \ \exists x \in E / P(x) » \text{ ou aussi } « \exists x \in E,\ P(x) \ ».$$

Par exemple :
- $\exists x \in \mathbb{R} \quad (x(x-1)<0)$ est vraie (par exemple $x=\frac{1}{2}$ vérifie bien la propriété).
- $\exists n \in \mathbb{N} \quad n^2-n>n$ est vraie (il y a plein de choix, par exemple $n=3$ convient, mais aussi $n=10$ ou même $n=100$, un seul suffit pour dire que l'assertion est vraie).
- $\exists x \in \mathbb{R} \quad (x^2=-1)$ est fausse (aucun réel au carré ne donnera un nombre négatif).

Le quantificateur $\exists!$: "il existe un unique"

La proposition : « il existe un et un seul élément x de E tel que la proposition $P(x)$ est vraie » s'écrit :

$$« \ \exists! x \in E,\ P(x) \ ».$$

Par exemple :
- $\exists! x \in \mathbb{R} \quad (x(x-1)<0)$ est fausse (on peut en trouver deux).

— $\exists! n \in \mathbb{N} \quad 2^n = 4$ est vraie (le seul choix possible est $n = 2$).
— $\exists! x \in \mathbb{R} \quad (x^2 = -1)$ est fausse.

Exercice

Ecrire avec des quantificateurs les propositions suivantes :

1) f est la fonction nulle (où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).
2) Le dénominateur D de f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.
3) f est l'identité de $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire la fonction qui, à chaque réel, associe lui-même).
4) Le graphe de f coupe la droite d'équation $y = x$.
5) f est croissante sur $\mathbb{R}$ (où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).
6) L'équation $\sin x = x$ a une et une seule solution dans $\mathbb{R}$.
7) Pour tout point M du plan $\mathscr{P}$, M est sur le cercle $\mathscr{C}$ de centre Ω et de rayon R si et seulement si la distance de M à Ω vaut R.

Solution

1) $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$.
2) $\exists x \in \mathbb{R} / D(x) = 0$.
3) $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x$.
4) $\exists x \in \mathbb{R} / f(x) = x$.
5) $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ (a \leqslant b \Rightarrow f(a) \leqslant f(b))$.
6) $\exists! x \in \mathbb{R} / \sin(x) = x$.
7) $\forall M \in \mathscr{P},\ (M \in \mathscr{C} \Leftrightarrow \Omega M = R)$.

COMMENTAIRE **2** *En 5), il ne faut pas lire que pour tout couple (a, b) de réels, on a $a \leqslant b$ ou encore, il ne faut pas lire $(\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ a \leqslant b) \Rightarrow f(a) \leqslant f(b)$. Mais, il faut lire que pour tout couple (a, b) de réels, **l'implication** $(a \leqslant b \Rightarrow f(a) \leqslant f(b))$ est vraie.*
De la même façon, en 7), il ne faut pas lire que tout point du plan est sur le cercle (ou encore il ne faut pas lire $(\forall M \in \mathscr{P},\ M \in \mathscr{C}) \Leftrightarrow ...$) mais il faut lire que pour tout point du plan, il est équivalent de dire que M est sur le cercle et que $\Omega M = R$. Dans cette phrase, le point M a la possibilité de ne pas être sur le cercle.

1.2.2 Propriétés des quantificateurs

La négation des quantificateurs : « Le contraire de $\forall$ est $\exists$ et le contraire de $\exists$ est $\forall$ ».

$$\boxed{\text{La négation de } \forall x \in E, \quad P(x) \quad \text{est} \quad \exists x \in E \quad non\ P(x).}$$

Par exemple la négation de $\forall x \in [1, +\infty[\quad (x^2 \geq 1)$ est l'assertion $\exists x \in [1, +\infty[\quad (x^2 < 1)$. En effet la négation de $x^2 \geq 1$ est non($x^2 \geq 1$) mais s'écrit plus simplement $x^2 < 1$.

$$\boxed{\text{La négation de } \exists x \in E \quad P(x) \quad \text{est} \quad \forall x \in E \quad \textit{non } P(x).}$$

Voici des exemples :

- La négation de $\exists z \in \mathbb{C} \quad (z^2 + z + 1 = 0)$ est $\forall z \in \mathbb{C} \quad (z^2 + z + 1 \neq 0)$.
- La négation de $\forall x \in \mathbb{R} \quad (x + 1 \in \mathbb{Z})$ est $\exists x \in \mathbb{R} \quad (x + 1 \notin \mathbb{Z})$.
- Ce n'est pas plus difficile d'écrire la négation de phrases complexes. Pour l'assertion :

  $$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y > 0 \quad (x + y > 10)$$

  sa négation est

  $$\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y > 0 \quad (x + y \leq 10).$$

Exercice

Ecrire avec des quantificateurs les propositions suivantes :

1) f n'est pas nulle (où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).
2) Le dénominateur D de la fraction ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
3) f n'est pas l'identité de $\mathbb{R}$ (où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).
4) f n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$ (où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).

Solution

1) $\exists x \in \mathbb{R} / f(x) \neq 0$.

2) $\forall x \in \mathbb{R}$, $D(x) \neq 0$. Vous constaterez que les phrases « le dénominateur ne s'annule pas » et « le dénominateur n'est pas nul » n'ont pas du tout la même signification.

3) $\exists x \in \mathbb{R} / f(x) \neq x$.

4) $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 / (a \leqslant b \text{ et } f(a) > f(b))$. Ici, il a fallu nier l'implication $(a \leqslant b \Rightarrow f(a) \leqslant f(b))$.

Exemple : une fonction f est continue en un réel x_0 :

$$f \text{ est continue en } x_0 \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 / \ \forall x \in D_f,\ (|x - x_0| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon).$$

Si on veut écrire la définition de : « f n'est pas continue en x_0 », il faut écrire la négation de la phrase précédente. Il faut donc nier les quantificateurs, mais aussi nier les implications. Nous rappelons que la négation de $P \Rightarrow Q$ est $P \wedge \overline{Q}$ et que la négation de $\leqslant$ est $>$. D'autre part, la négation de $\forall \varepsilon > 0, \ldots$ est $\exists \varepsilon > 0 \ldots$ et non pas $\exists \varepsilon \leqslant 0 / \ldots$.

$$f \text{ n'est pas continue en } x_0 \Leftrightarrow (\exists \varepsilon > 0 / \ \forall \alpha > 0,\ \exists x \in D_f / (\underbrace{|x - x_0| \leqslant \alpha}_{P} \text{ et } \underbrace{|f(x) - f(x_0)| > \varepsilon}_{\overline{Q}}).$$

La distribution des quantificateurs

Passons maintenant aux rapports qu'entretiennent les quantificateurs $\forall$ et $\exists$ avec les connecteurs logiques *et* et *ou*.

Théorème : Soient E un ensemble et $P(x)$ et $Q(x)$ deux propositions.

❶ $(\forall x \in E,\ P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow ((\forall x \in E/\ P(x)) \wedge (\forall x \in E,\ Q(x)))$.

❷ $(\forall x \in E,\ P(x) \vee Q(x)) \underset{\Leftarrow}{\overset{\not\Rightarrow}{}} ((\forall x \in E/\ P(x)) \vee (\forall x \in E,\ Q(x)))$.

❸ $(\exists x \in E,\ P(x) \wedge Q(x)) \underset{\not\Leftarrow}{\overset{\Rightarrow}{}} ((\exists x \in E,\ P(x)) \wedge (\exists x \in E,\ Q(x)))$.

❹ $(\exists x \in E,\ P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow ((\exists x \in E,\ P(x)) \vee (\exists x \in E,\ Q(x)))$.

Dans ❷ et ❸, on ne trouve pas d'équivalence mais seulement une implication. Pour le comprendre, commençons par analyser le langage courant. La phrase « dans la classe, il existe une personne qui est un garçon et une autre personne qui est une fille » est vraie mais une même personne ne peut jouer les deux rôles à la fois ou encore la phrase « il existe un élève qui est un garçon et une fille » est fausse. De même, la phrase « dans la classe, tout élève est un garçon ou une fille » est vraie mais la phrase « dans la classe, tout élève est un garçon ou tout élève est une fille » est fausse.

Etudions un exemple « plus mathématique », et pour cela, considérons les deux propositions

$$(\exists x \in \mathbb{R}/\ \cos x = 0) \text{ et } (\exists x \in \mathbb{R}/\ \sin x = 0),$$

et

$$(\exists x \in \mathbb{R}/\ \cos x = 0 \text{ et } \sin x = 0).$$

La première proposition est vraie car 0 est un réel x tel que $\sin x = 0$ et $\frac{\pi}{2}$ est un réel x tel que $\cos x = 0$. Ainsi, dans les deux affirmations $(\exists x \in \mathbb{R}/\ \cos x = 0)$ et $(\exists x \in \mathbb{R}/\ \sin x = 0)$, la lettre x utilisée deux fois **ne désigne pas forcément un même nombre**. La deuxième proposition est clairement fausse (car par exemple $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \neq 0$).
Pour comprendre vraiment la phrase $(\exists x \in \mathbb{R}/\ \cos x = 0)$ et $(\exists x \in \mathbb{R}/\ \sin x = 0)$, il suffit d'être plus explicite : $(\exists x_1 \in \mathbb{R}/\ \cos x_1 = 0)$ et $(\exists x_2 \in \mathbb{R}/\ \sin x_2 = 0)$.

Etudions un autre exemple. On rappelle qu'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est monotone si et seulement si elle est croissante ou décroissante sur $\mathbb{R}$. Ceci s'écrit avec des quantificateurs :

$$(\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ (a \leqslant b \Rightarrow f(a) \leqslant f(b))) \text{ ou } (\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ (a \leqslant b \Rightarrow f(a) \geqslant f(b))),$$

et ne s'écrit sûrement pas

$$(\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2,\ (a\leqslant b\Rightarrow f(a)\leqslant f(b)\ \text{ou}\ f(a)\geqslant f(b)),$$

cette deuxième phrase étant, elle, vérifiée par toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On ne peut donc pas « distribuer $\forall$ sur le mot *ou* ».

Encore un exemple. On considère deux fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f\times g=0$. Peut-on affirmer que l'on a $f=0$ ou $g=0$? La réponse est non. Il suffit de considérer deux fonctions non nulles f et g telles que, à chaque fois que f ne s'annule pas, ce soit g qui s'annule. Par exemple, $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \left\{\begin{array}{l} x \text{ si } x\geqslant 0\\ 0 \text{ si } x<0.\end{array}\right.\end{array}$ et $g:\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \left\{\begin{array}{l} -x \text{ si } x\leqslant 0\\ 0 \text{ si } x>0.\end{array}\right.\end{array}$. Pour ces fonctions f et g, si x est un réel élément de $]-\infty,0[$, $f(x)g(x)=0\times x=0$ et si x est un réel élément de $[0,+\infty[$, $f(x)g(x)=x\times 0=0$.
Revenons à des fonctions quelconques f et g et exprimons ce qui précède avec des quantificateurs.

$$fg=0\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\ f(x)g(x)=0\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\ (f(x)=0\ \text{ou}\ g(x)=0)\ (I),$$

alors que

$$f=0\ \text{ou}\ g=0\Leftrightarrow (\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=0)\ \text{ou}\ (\forall x\in\mathbb{R},\ g(x)=0)\ (II).$$

Les propositions (I) et (II) ne sont pas les mêmes et encore une fois, on ne peut donc pas distribuer $\forall$ sur le mot *ou*. Dans la phrase (I), « le mot *ou* est une fonction de x » et en faisant varier x, c'est tantôt $f(x)$ qui peut être nul et tantôt $g(x)$. Ce n'est pas le cas dans la phrase (II).

On peut distribuer $\forall$ sur « et » et $\exists$ sur « ou »
mais on ne peut pas distribuer $\forall$ sur « ou » et $\exists$ sur « et ».

Exercice

Ecrire avec des quantificateurs les propositions suivantes :

1) a) Tout entier naturel est pair ou impair.
b) Tout entier naturel est pair ou tout entier naturel est impair.
2) a) f est strictement monotone sur $\mathbb{R}$ (où f désigne une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).
b) f n'est pas strictement monotone sur $\mathbb{R}$.

Solution

1) a) $\forall n\in\mathbb{N}$, (n est pair ou n est impair).
b) ($\forall n\in\mathbb{N}$, n est pair) ou ($\forall n\in\mathbb{N}$, n est impair).

2) a) $(\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2,\ (a<b\Rightarrow f(a)<f(b)))$ ou $(\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2,\ (a<b\Rightarrow f(a)>f(b)))$.

b) $(\exists(a,b)\in\mathbb{R}^2/(a<b \text{ et } f(a)\geqslant f(b)))$ et $(\exists(a,b)\in\mathbb{R}^2/(a<b \text{ et } f(a)\leqslant f(b)))$.

La permutation des quantificateurs

L'ordre des quantificateurs est très important. Voici une phrase vraie : *"Pour toute personne, il existe un numéro de téléphone"*. Bien sûr le numéro dépend de la personne. Par contre cette phrase est fausse : *Il existe un numéro, pour toutes les personnes*. Ce serait le même numéro pour tout le monde !

Un autre exemple :

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad \exists y\in\mathbb{R} \quad (x+y>0) \quad \text{et} \quad \exists y\in\mathbb{R} \quad \forall x\in\mathbb{R} \quad (x+y>0).$$

sont différentes. La première est vraie, la seconde est fausse. En effet une phrase logique se lit de gauche à droite, ainsi la première phrase affirme *Pour tout réel x, il existe un réel y (qui peut donc dépendre de x) tel que* $x+y>0$. (par exemple on peut prendre $y=x+1$). C'est donc une phrase vraie. Par contre la deuxième se lit : *Il existe un réel y, tel que pour tout réel x,* $x+y>0$. Cette phrase est fausse, cela ne peut pas être le même y qui convient pour tous les x !

Théorème

❶ $((\forall x\in E), (\forall y\in E), P(x,y)) \Leftrightarrow ((\forall y\in E), (\forall x\in E), P(x,y))$.

❷ $((\exists x\in E), (\exists y\in E), P(x,y)) \Leftrightarrow ((\exists y\in E), (\exists x\in E), P(x,y))$.

On peut permuter des quantificateurs de même nature.

Théorème $((\exists x\in E)/(\forall y\in E, P(x,y))) \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} (\forall y\in E, \exists x\in E/P(x,y))$.

on ne peut pas permuter des quantificateurs de natures différentes.

Quand on écrit $\exists x/\ \forall y$ l'élément x est fourni une bonne fois pour toutes **avant** les y et est donc **constant** quand y varie. Quand on écrit $\forall y,\ \exists x$ l'élément x est fourni **après** chaque y. Il dépend de y et **peut donc varier** quand y varie.

Exercice

Ecrire avec des quantificateurs les propositions suivantes :

1) a) f est constante sur $\mathbb{R}$ (où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).

b) f n'est pas constante sur $\mathbb{R}$.

2) a) Pour chaque entier, on peut trouver un entier strictement plus grand (cette affirmation est vraie).

b) Il y a un entier plus grand que tous les entiers (cette affirmation est fausse).

Solution

1) a) $\exists C \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = C$, ou encore plus simplement, $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(0)$.

Attention, $\forall x \in \mathbb{R}, \exists C \in \mathbb{R} / f(x) = C$ veut dire tout à fait autre chose !

b) $\forall C \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R} / f(x) \neq C$, ou encore plus simplement, $\exists x \in \mathbb{R} / f(x) \neq f(0)$.

2) a) $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists m \in \mathbb{N} / m > n$.

b) $\exists m \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N},\ m > n$.

1.2.3 Exercices

1- Ecrire les phrases suivantes à l'aide de quantificateurs :

- Pour tout entier x, il existe un entier y tel que, pour tout entier z, la relation $z < x$ implique le relation $z < x + 1$

- La fonction f est croissante

- La fonction f est croissante et positive

- Il y a une valeur pour laquelle la fonction f prend une valeur négative

- f ne prend jamais deux fois la même valeur

- f atteint toutes les valeurs de $\mathbb{N}$

- la fonction f n'est pas inférieure à la fonction g

2- Donner la négation des énoncés suivants :

- $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \qquad (|x - 7/5| < \alpha \Rightarrow |5x - 7| < \epsilon)$.

- $(\forall x)(\exists n)/(x \leq n)$.

- $(\exists M)/(\forall n)(|u_n| \leq M)$.

- $(\forall x)(\forall y)(xy = yx)$.

- $(\forall x)(\exists y)/(yxy^{-1} = x)$.

- $(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})/(\forall n \geq N)(|u_n| < \epsilon)$.

- $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall \epsilon > 0)(\exists \alpha > 0)/(\forall f \in \mathscr{F})(\forall y \in \mathbb{R})(|x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon)$.

3- Soient les quatre assertions suivantes :

$$(a)\ \exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0 \quad ; \quad (b)\ \forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0\ ;$$

$$(c)\ \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0 \quad ; \quad (d)\ \exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad y^2 > x.$$

1. Les assertions a, b, c, d sont-elles vraies ou fausses ?
2. Donner leur négation.

4- Les phrases suivantes sont-elles équivalentes ?

1. « $\forall x \in \mathbb{R}, (f(x) = 0 \text{ et } g(x) = 0)$ » et « $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0) \text{ et } (\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 0)$ ».
2. « $\forall x \in \mathbb{R}, (f(x) = 0 \text{ ou } g(x) = 0)$ » et « $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0) \text{ ou } (\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 0)$ ».

1.3 Les grands types de raisonnement

Voici des méthodes classiques de raisonnements.

1.3.1 Raisonnement direct

On veut montrer que l'assertion $P \implies Q$ est vraie. On suppose que P est vraie et on montre qu'alors Q est vraie. C'est la méthode à laquelle vous êtes le plus habitué.
Attention : si la proposition $P \implies Q$ est vraie, cela ne veut PAS dire que Q est vraie ! Pour que Q soit vraie, il faut montrer que $P \implies Q$ est vraie, ET que P est vraie.

EXAMPLE **1** *Montrer que si $a, b \in \mathbb{Q}$ alors $a + b \in \mathbb{Q}$.*

PREUVE ***1*** *Prenons $a \in \mathbb{Q}$, $b \in \mathbb{Q}$. Rappelons que les rationnels $\mathbb{Q}$ sont l'ensemble des réels s'écrivant $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.*

Alors $a = \frac{p}{q}$ pour un certain $p \in \mathbb{Z}$ et un certain $q \in \mathbb{N}^*$. De même $b = \frac{p'}{q'}$ avec $p' \in \mathbb{Z}$ et $q' \in \mathbb{N}^*$. Maintenant

$$a + b = \frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{pq' + qp'}{qq'}.$$

Or le numérateur $pq' + qp'$ est bien un élément de $\mathbb{Z}$; le dénominateur qq' est lui un élément de $\mathbb{N}^*$. Donc $a + b$ s'écrit bien de la forme $a + b = \frac{p''}{q''}$ avec $p'' \in \mathbb{Z}$, $q'' \in \mathbb{N}^*$. Ainsi $a + b \in \mathbb{Q}$.

1.3.2 Cas par cas

Si l'on souhaite vérifier une assertion $P(x)$ pour tous les x dans un ensemble E, on montre l'assertion pour les x dans une partie A de E, puis pour les x n'appartenant pas à A. C'est la méthode de *disjonction* ou du *cas par cas*.

EXAMPLE **2** *Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x-1| \leq x^2 - x + 1$.*

PREUVE ***2*** *Soit $x \in \mathbb{R}$. Nous distinguons deux cas.*

Premier cas : $x \geq 1$. *Alors $|x-1| = x-1$. Calculons alors $x^2 - x + 1 - |x-1|$.*

$$\begin{aligned} x^2 - x + 1 - |x-1| &= x^2 - x + 1 - (x-1) \\ &= x^2 - 2x + 2 \\ &= (x-1)^2 + 1 \geq 0. \end{aligned}$$

Ainsi $x^2 - x + 1 - |x-1| \geq 0$ et donc $x^2 - x + 1 \geq |x-1|$.

Deuxième cas : $x < 1$. *Alors $|x-1| = -(x-1)$. Nous obtenons $x^2 - x + 1 - |x-1| = x^2 - x + 1 + (x-1) = x^2 \geq 0$. Et donc $x^2 - x + 1 \geq |x-1|$.*

Conclusion. *Dans tous les cas $|x-1| \leq x^2 - x + 1$.*

1.3.3 Contraposée

Le raisonnement par *contraposition* est basé sur l'équivalence suivante :

$$\boxed{\text{L'assertion } P \implies Q \text{ est équivalente à } \overline{Q} \implies \overline{P}.}$$

Donc si l'on souhaite montrer l'assertion $P \implies Q$, on peut (il est suffisant de) montrer que si $\overline{Q}$ est vraie alors $\overline{P}$ est vraie. Ceci peut se révéler très pratique car parfois l'implication $\overline{Q} \implies \overline{P}$ est plus simple.

EXAMPLE **3** *Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si n^2 est pair alors n est pair.*

PREUVE ***3*** *Montrer l'implication directe n'est pas facile. Nous supposons que n n'est pas pair. Nous voulons montrer qu'alors n^2 n'est pas pair. Comme n n'est pas pair, il est impair et donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$. Alors $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2\ell + 1$ avec $\ell = 2k^2 + 2k \in \mathbb{N}$. Et donc n^2 est impair.*

Conclusion : nous avons montré que si n est impair alors n^2 est impair. Par contraposition ceci est équivalent à : si n^2 est pair alors n est pair.

1.3.4 Absurde

Le *raisonnement par l'absurde* pour montrer $P \implies Q$ repose sur le principe suivant : on suppose à la fois que P est vraie et que Q est fausse et on cherche une contradiction. Ainsi si P est vraie alors Q doit être vraie et donc $P \implies Q$ est vraie.
En termes logiques, la proposition "$P \implies Q$ *est vrai*" est équivalente à "$\overline{P \implies Q}$ *est faux*". Or "$\overline{P \implies Q}$" est équivalent à "$P \wedge \overline{Q}$".

$$\boxed{\text{L'assertion "}P \implies Q\ \textit{est vrai}\text{" est équivalente à "}P \wedge \overline{Q}\ \textit{est faux}\text{".}}$$

EXAMPLE **4** *Soient* $a, b \geq 0$. *Montrer que si* $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ *alors* $a = b$.

PREUVE ***4*** *Nous raisonnons par l'absurde en supposant que* $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ ***et*** $a \neq b$. *Comme* $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ *alors* $a(1+a) = b(1+b)$ *donc* $a + a^2 = b + b^2$ *d'où* $a^2 - b^2 = b - a$. *Cela conduit à* $(a-b)(a+b) = -(a-b)$. *Comme* $a \neq b$ *alors* $a - b \neq 0$ *et donc en divisant par* $a - b$ *on obtient* $a + b = -1$. *La somme de deux nombres positifs ne peut être négative. Nous obtenons une contradiction. Conclusion : soit* $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ *est faux, soit c'est vrai et dans ce cas, forcément,* $a = b$.

Dans la pratique, on peut choisir indifféremment entre un raisonnement par contraposition ou par l'absurde. Attention cependant de bien écrire quel type de raisonnement vous choisissez et surtout de ne pas changer en cours de rédaction !

1.3.5 Contre-exemple

Si l'on veut montrer qu'une assertion du type $\forall x \in E \quad P(x)$ est vraie alors pour chaque x de E il faut montrer que $P(x)$ est vraie. Par contre pour montrer que cette assertion est fausse alors il suffit de trouver $x \in E$ tel que $P(x)$ soit fausse. (Rappelez-vous la négation de $\forall x \in E \quad P(x)$ est $\exists x \in E \quad \overline{P(x)}$). Trouver un tel x c'est trouver un *contre-exemple* à l'assertion $\forall x \in E \quad P(x)$.

EXAMPLE **5** *Montrer que l'assertion suivante est fausse "Tout entier positif est somme de trois carrés".*

(Les carrés sont les 0^2, 1^2, 2^2, 3^2,... *Par exemple* $6 = 2^2 + 1^2 + 1^2$.*)*

PREUVE ***5*** *Un contre-exemple est* 7 *: les carrés inférieurs à* 7 *sont* 0, 1, 4 *mais avec trois de ces nombres on ne peut faire* 7.

1.3.6 Récurrence

Le *principe de récurrence* permet de montrer qu'une assertion $P(n)$, dépendant de n, est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. La démonstration par récurrence se déroule en trois étapes : lors de l'**initialisation** on prouve $P(0)$. Pour l'étape d'**hérédité**, on suppose $n \geq 0$ donné avec $P(n)$ vraie, et on démontre alors que l'assertion $P(n+1)$ au rang suivant est vraie. Enfin dans la **conclusion**, on rappelle que par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On montre donc "$P(0)$ vrai" et "$\forall n, P(n) \implies P(n+1)$ vrai".
Dans ce cas, $P(0) \implies P(1) \implies P(2) \implies \ldots \implies P(n) \implies \ldots$

EXAMPLE **6** *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n > n$.*

PREUVE ***6*** *Pour $n \geq 0$, notons $P(n)$ l'assertion suivante :*

$$2^n > n.$$

Nous allons démontrer par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$.

Initialisation. *Pour $n = 0$ nous avons $2^0 = 1 > 0$. Donc $P(0)$ est vraie.*

Hérédité. *Fixons $n \geq 0$. Supposons que $P(n)$ soit vraie. Nous allons montrer que $P(n+1)$ est vraie.*

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &= 2^n + 2^n \\ &> n + 2^n \quad \text{car par } P(n) \text{ nous savons } 2^n > n, \\ &> n + 1 \quad \text{car } 2^n \geq 1. \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. *Par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$, c'est-à-dire $2^n > n$ pour tout $n \geq 0$.*

Remarque : Si on doit démontrer qu'une propriété est vraie pour tout $n \geq n_0$, alors on commence l'initialisation au rang n_0.

Exercices

1. (Raisonnement direct) Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$. Montrer que si $a \leq b$ alors $a \leq \frac{a+b}{2} \leq b$ et $a \leq \sqrt{ab} \leq b$.
2. (Cas par cas) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)$ est divisible par 2 (distinguer les n pairs des n impairs).

3. (Contraposée ou absurde) Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. Montrer que si $b \neq 0$ alors $a + b\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. (On utilisera que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.)
4. (Absurde) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\sqrt{n^2+1}$ n'est pas un entier.
5. (Contre-exemple) Est-ce que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x < 2 \implies x^2 < 4$?
6. (Récurrence) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
7. (Récurrence) Fixons un réel $x \geq 0$. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $(1+x)^n \geq 1+nx$.

Chapitre 2

Bases mathématiques

2.1 suites, convergence

2.1.1 suites réelles

Dans cette section, on considère uniquement des suites réelles, indexées par les entiers naturels. Génériquement, on notera $(x_n)_n$ une telle suite.

DEFINITION **1 (Limite d'une suite)** *soit $l \in \mathbb{R}$. On dira que l est la limite de la suite $(x_n)_n$ si on a la propriété suivante :*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \textit{ tel que } |x_n - l| < \epsilon\ \forall n \geq N. \tag{2.1}$$

On écrira alors

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = l.$$

On dit généralement que $(x_n)_n$ converge vers l ou que $(x_n)_n$ tend vers l. Dit autrement, $(x_n)_n$ converge vers l si, pour tout $\epsilon > 0$, tous les termes de la suite $(x_n)_n$ sont ϵ-proches de l, à partir d'un certain rang N.

EXAMPLE **1**

a) Soit $x_n = 1/n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. On veut montrer que $\lim_n x_n = 0$. Pour cela nous n'avons à notre disposition seulement la définition de limite donnée ci-dessus. Il faut donc montrer que pour n'importe quel $\epsilon > 0$, on peut trouver un $N \in \mathbb{N}$ tel que $-\epsilon < x_n < \epsilon$ pour tout $n \geq N$. On pose $N = [1/\epsilon] + 1$. On a alors, pour $n \geq N$, $n > 1/\epsilon$, et donc $1/n < \epsilon$. Puisque $1/n$ est strictement positif, on a donc

$$-\epsilon < 0 < 1/n < \epsilon,\ \ \forall n \geq N.$$

b) Soit $x_n = (-1)^n$. On veut montrer que x_n ne converge pas. On doit donc montrer la négation de (2.1) :

$$\exists \epsilon > 0 \ \textit{ tel que } \ \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N : \ |x_n - l| > \epsilon. \tag{2.2}$$

Soit $l \geq 0$. On prend $\epsilon = 1/2$. Pour n impair, on a $|x_n - l| = l + 1 > \epsilon$.
Soit maintenant $l < 0$. On prend $\epsilon = 1/2$. Pour n pair, on a $|x_n - l| = 1 - l > \epsilon$.

c) Soit $x_n = \frac{n}{2}(1-(-1)^n)$. On veut montrer que $(x_n)_n$ n'est pas convergente. Regardons les premiers termes de la suite : $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{3}{2}(1+1) = 3$, $x_4 = 0$, $x_5 = 5$ etc... On peut réécrire la définition de (x_n) de manière différente :

$$x_n = \begin{cases} 0 \, si \; n \; est \; pair \\ n \; sinon. \end{cases}$$

(Montrez le !)

Pour cette suite on a donc la propriété suivante :

$$\forall \epsilon > 0, \; \forall N \in \mathbb{N}, \; \exists n \geq N \; tel \; que \; |x_n - 0| < \epsilon.$$

(il suffit de prendre $n \geq N$ pair). Cependant, cela ne signifie pas que $\lim_n x_n = 0$. Cela signifie que pour tout $\epsilon > 0$, il existe une infinité de termes de la suite $(x_n)_n$ qui sont ϵ-proches de 0. Montrons maintenant que (x_n) ne converge pas.

Soit $l \in \mathbb{R}$. Supposons d'abord que $l = 0$ et prenons $\epsilon = 1$. On a $|x_n| = n$ pour n impair donc, pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe $n > N$ (impair) tel que $|x_n| = n > 1$. Donc $(x_n)_n$ ne converge pas vers 0.

Supposons maintenant que $l \neq 0$ et prenons $\epsilon = |l|/2$. Pour tout n pair on a $|x_n - l| = |l| > \epsilon$ donc est vérifié et $(x_n)_n$ ne converge pas vers l.

THEOREM **1** *Soit $(x_n)_n$ une suite de nombres réels. Alors $(x_n)_n$ a **au plus** une limite.*

Preuve (*par l'absurde (voir section 1.3.4)*).

Supposons par contradiction que $(x_n)_n$ admet deux limites distinctes : $l_1 < l_2$. Puisque $l_1 < l_2$, il existe $\epsilon > 0$ tel que $l_2 > l_1 + 3\epsilon$. Par définition d'une limite, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ et $N_2 \in \mathbb{N}$ tels que

$$|x_n - l_1| < \epsilon, \; \forall n \geq N_1 \text{ et } \; |x_n - l_2| < \epsilon, \; \forall n \geq N_2.$$

On note $N = \max\{N_1, N_2\}$. On a alors, pour tout $n \geq N$,

$$l_1 + \epsilon \geq x_n \geq l_2 - \epsilon \geq l_1 + 2\epsilon.$$

On aboutit donc à une contradiction. ■

Remarque : Nous avons supposé qu'une suite admet deux limites distinctes. Nous avons alors appliqué la définition aux deux limites, et avons trouvé un $\epsilon > 0$ pour lequel apparait une contradiction. Or la définition nous dit que si une suite converge, la propriété doit être vraie pour **toutes** les valeurs de $\epsilon > 0$. Il a donc suffit d'en exhiber un pour lequel ça ne marche pas.

THEOREM **2** *Soient $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ deux suites réelles convergeant respectivement vers l et l'. Alors, si $x_n \leq y_n$ pour tout n, on a $l \leq l'$.*

Preuve (*par contraposée (voir section 1.3.3)*).

Supposons par contradiction que $l' < l$. Alors, si on fixe ϵ tel que $l' < l - 2\epsilon$, il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, on a

$$x_n > l - \epsilon > l' + \epsilon > y_n,$$

et on aboutit à une contradiction. ■

Remarque : On a montré que $(\forall n,\, A(n)) \implies B$, en utilisant la contraposée : $\overline{B} \implies \exists n, \overline{A(n)}$ (La proposition $\overline{B}$ est "$l' < l$" et $\overline{A(n)}$ est "$x_n > y_n$).

La proposition suivante peut s'avérer très pratique :

PROPOSITION **1** *Si $x_n \leq y_n \leq z_n$ pour tout entier n et si les suites $(x_n)_n$ et $(z_n)_n$ convergent vers la même limite l, alors $(y_n)_n$ converge également vers l.*

Preuve. (*par retour à la définition*).

Soit $\epsilon > 0$; Il existe N_1 tel que pour tout $n \geq N_1$, on a $l - \epsilon < x_n$. De même, il existe N_2 tel que, si $n \geq N_2$, on a $z_n < l + \epsilon$. Ainsi, si $n \geq N := \max\{N_1, N_2\}$, on a

$$l - \epsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < l + \epsilon,$$

ce qui signifie que

$$|y_n - l| < \epsilon$$

pour tout $n \geq N$. Le résultat est prouvé. ■

COROLLARY **1** *Si $(x_n)_n$ est une suite positive ou nulle telle que $x_n \leq y_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors, si $(y_n)_n$ converge vers 0, $(x_n)_n$ également.*

(écrivez la démonstration)

THEOREM **3 (Propriétés algébriques)** *Soient $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ deux suites réelles, admettant respectivement les limites l et l'. Alors la suite $(x_n + y_n)_n$ converge vers $l + l'$ et la suite $(x_n y_n)_n$ converge vers ll'.*

Preuve. (par raisonnement direct).

Commençons par prouver la première propriété. Soit $\epsilon > 0$. Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N_1$, on a

$$|x_n - l| < \epsilon/2.$$

De plus, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N_2$,

$$|y_n - l'| < \epsilon/2$$

Par l'inégalité triangulaire : $|a + b| \leq |a| + |b|$, on a

$$|(x_n + y_n) - (l + l')| \leq |x_n - l| + |y_n - l'| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon, \forall n \geq N := \max\{N_1, N_2\}.$$

Le premier point est prouvé.

Pour le second point, soit $1 > \epsilon > 0$. On a

$$x_n y_n - ll' = l(y_n - l') + l'(x_n - l) + (x_n - l)(y_n - l').$$

Ainsi

$$\begin{aligned} |x_n y_n - ll'| &\leq |l(y_n - l')| + |l'(x_n - l)| + |(x_n - l)(y_n - l')| \\ &\leq |l||y_n - l'| + |l'||x_n - l| + |x_n - l||y_n - l'| \end{aligned}$$

Puisque $(x_n)_n$ converge vers l, il existe N_1 entier tel que, pour tout $n \geq N$, on a

$$|x_n - l| \leq \frac{\epsilon}{3(|l'| + 1)}.$$ [1]

De même, il existe N_2 entier tel que, pour tout $n \geq N_2$, on a

$$|y_n - l'| \leq \frac{\epsilon}{3(|l| + 1)}.$$

Ainsi, pour $n \geq \max\{N_1, N_2\}$,

$$|x_n y_n - ll'| \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon^2}{9} \leq \epsilon$$

On a prouvé que $(x_n y_n)_n$ converge vers ll'. ■

Rappelons la définition de la continuité d'une fonction réelle :

DEFINITION **2** *Une fonction réelle f est continue en $x \in \mathbb{R}$ si*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tel que } |y - x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \epsilon.$$

La négation de cette proposition s'écrit ainsi :

$$\exists \epsilon > 0,\ \forall \delta > 0\ \exists y \text{ tel que } |y - x| < \delta \text{ et } |f(y) - f(x)| \geq \epsilon,$$

ce qui est équivalent à

$$\exists \epsilon > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \text{ tel que } |x_n - x| < 1/n \text{ et } |f(x_n) - f(x)| \geq \epsilon.$$

Cela signifie qu'il existe une suite $(x_n)_n$ qui converge vers x et telle que $(f(x_n))_n$ ne converge pas vers $f(x)$. On a donc la proposition suivante, qui traduit la continuité d'une fonction réelle en un point x en termes de suites convergentes :

PROPOSITION **2** *Soit f une fonction réelle et $x \in \mathbb{R}$. Alors f est continue au point x ssi pour toute suite $(x_n)_n$ convergeant vers x, on a $\lim_n f(x_n) = f(x)$.* [2]

1. Remarquez qu'on prend $(|l'| + 1)$ et non pas $|l'|$ car l' pourrait tout à fait être 0

2. On peut définir la continuité d'une fonction en un point comme dans la proposition ci-dessus, ce qui est plus "parlant" que la définition formelle en termes d'ϵ et de δ.

Preuve. (inclure dessin) Commençons par la condition suffisante. Supposons que pour toute suite $(x_n)_n$ convergeant vers x, on a $\lim_n f(x_n) = f(x)$. Si f n'est pas continue en x, alors il existe $\epsilon > 0$ tel que $\forall \delta > 0, \exists y$ tel que $|y-x| < \delta$ et pourtant $|f(y) - f(x)| \geq \epsilon$.
Soit $\delta = 1/n$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un y_n tel que $|y_n - x| < \delta$, et $|f(y_n) - f(x)| \geq \epsilon$. On a donc défini une suite $(y_n)_n$, avec y_n converge vers x et pourtant $\lim_n f(y_n) \neq f(x)$. On aboutit à une contradiction.

Montrons l'implication inverse. Supposons que f soit continue en x, et soit $(x_n)_n$ une suite qui converge vers x. Fixons un $\epsilon > 0$. Alors, par continuité de f en x, $\exists \delta > 0$ tel que pour tout y tel que $|y-x| < \delta$, on a $|f(y) - f(x)| < \epsilon$. Mais puisque x_n converge vers x, par définition, pour tout $\delta > 0$, $\exists N, n \geq N \implies |x_n - x| < \delta$. Par conséquent, $|f(x_n) - f(x)| < \epsilon$, $\forall n \geq N$. Puisque ϵ a été fixé arbitrairement, c'est forcément que $\lim_n f(x_n) = f(x)$. ■

L'utilisation de l'implication directe de cette proposition s'appelle passage à la limite.

DEFINITION **3** *Soit $(x_n)_n$ une suite réelle.*

1) *On dit que $(x_n)_n$ est majorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $x_n \leq M$, $\forall n$;*
2) *on dit que $(x_n)_n$ est minorée s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $x_n \geq m$, $\forall n$;*
3) *enfin on dit que $(x_n)_n$ est bornée si elle est majorée et minorée.*

EXAMPLE **2** *Si $x_n = n$, $(x_n)_n$ est minorée, mais pas majorée ; si $x_n = 1/n$, $(x_n)_n$ est bornée ; si $x_n = -n$, $(x_n)_n$ est majorée, mais pas minorée.*

Nous avons besoin de la notion de borne supérieure (resp. inférieure) dans la suite du cours. Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Si A est majoré, alors il admet un plus petit majorant. Plus précisément

PROPOSITION **3** *Soit $A \subset \mathbb{R}$. Si A est majoré, alors A admet une borne supérieure $\sup A$, qui est l'unique nombre réel vérifiant :*

(i) $\sup A \geq x$ *, pour tout $x \in A$; ($\sup A$ est un majorant de A)*

(ii) *si M est un majorant de A, alors $M \geq \sup A$ (il n'existe pas de majorant de A plus petit que $\sup A$)*

Par exemple soit $A = \{1 - 1/n,\ n \in \mathbb{N}^*\} = \{0, 1/2, 2/3, 3/4, \ldots\}$. A est majoré par exemple par 1, 2 ou 3. Le plus petit des majorants est 1 (donc $\sup A = 1$). En effet, soit $M < 1$. Alors pour $n > 1/(1-M)$, on a $1 - 1/n > M$ et donc M n'est pas un majorant de A. Remarquez bien dans cet exemple que $\sup A \notin A$.

THEOREM **4** *Soit $(x_n)_n$ une suite réelle.*

1) *Si $(x_n)_n$ est croissante et majorée alors $(x_n)_n$ est convergente ;*
2) *si $(x_n)_n$ est décroissante et minorée alors elle est convergente.*

Preuve. (*par retour à la définition*).

On prouve uniquement le point 1) ; le point 2) est similaire. La suite $(x_n)_n$ étant majorée, l'ensemble $A := \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ admet une borne supérieure l. Montrons que $(x_n)_n$ converge vers l. Par définition, l est le plus petit des majorants de l'ensemble A donc, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un élément de A qui est supérieur à $l - \epsilon$ (sinon $l - \epsilon$ serait un majorant de A, ce qui n'est pas possible par définition de l). Par conséquent, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_{n_0} \geq l - \epsilon$. Mais la suite $(x_n)_n$ est croissante donc, pour tout $n \geq n_0$,

$$l \geq x_n \geq x_{n_0} \geq l - \epsilon.$$

Ceci prouve que $(x_n)_n$ converge vers l. ■

2.1.2 suites vectorielles

Une suite vectorielle de $\mathbb{R}^d$ est une suite $(x_n)_n$ où $x_n = (x_n^1, \dots, x_n^d)$. Par exemple, dans $\mathbb{R}^3$, $(x_n)_n = (1/n, 1/n^2, n+2)$ est une suite vectorielle. Dans la section précédente sur les suites réelles, nous avons souvent utilisé la valeur absolue ($|.|$) comme mesure de la distance entre deux points de $\mathbb{R}$. Cela était nécessaire pour définir par exemple la notion de convergence : l'expression "$|x_n - x| < \epsilon$" signifie que sur la ligne qui représente $\mathbb{R}$, la distance entre x_n et x est inférieure à ϵ.

Dans ce qui suit, nous aurons également besoin de mesurer des distances entre deux points de $\mathbb{R}^d$, pour dire s'ils sont proches ou non. Pour dire qu'une suite dans $\mathbb{R}^d$ converge, il faut définir la notion de distance. Nous rappelons ici le concept général de **norme**, puis nous rappelons ce qu'est la **norme euclidienne** car c'est la notion de distance usuelle pour les suites vectorielles.

DEFINITION **4** *Une norme sur $\mathbb{R}^d$ est une application $\mathcal{N}$ de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}_+$ qui satisfait les propriétés suivantes :*

($N1$) $\mathcal{N}(x) = 0$ *implique que* $x = 0$ *;*

($N2$) *pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$, *on a* $\mathcal{N}(\alpha x) = |\alpha| \mathcal{N}(x)$ *;*

($N3$) *pour tout* $x, y \in \mathbb{R}^d$, *on a*

$$\mathcal{N}(x+y) \leq \mathcal{N}(x) + \mathcal{N}(y).$$

Quelques remarques : - $\mathcal{N}(x)$ est un nombre positif ou nul, qui représente une mesure de la distance entre le point x de $\mathbb{R}^d$ et l'origine de $\mathbb{R}^d$ (notée 0_d). Ce nombre ne peut pas être négatif ;
- Aucun point de $\mathbb{R}^d$ n'est à distance nulle de 0_d à part 0_d lui-même ;
- Dans la 2ème propriété, αx est le produit extérieur : $\alpha x = (\alpha x^1, ..., \alpha x^d)$. Ainsi, si on multiplie toutes les coordonnées d'un vecteur par le **même** scalaire α, alors on a multiplié la distance du vecteur à l'origine par α ;

- La 3ème propriété est la fameuse **inégalité triangulaire**. Elle exprime l'idée que la distance est une mesure "minimale". En géométrie euclidienne, c'est l'idée que la ligne droite est le plus court chemin entre deux points.

On peut définir autant de normes que l'on peut imaginer, la notion de distance n'étant pas unique.

EXAMPLE **3** *Sur $\mathbb{R}$, l'application $|.|$ est une norme. En effet, elle va de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$ et :*
- $|x| = 0$ *implique que* $x = 0$ *;*
- *pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$*, on a* $|\alpha x| = |\alpha||x|$ *(par ex.* $|-3*4| = 3*|4|$*) ;*
- *pour tout* $x, y \in \mathbb{R}$*, on a* $|x+y| \leq |x| + |y|$ *(par ex.* $|2+(-1)| < |2| + |1|$*)*

Avant de définir la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^d$, nous avons besoin de rappeler la notion de **produit scalaire**. Soient $x, y \in \mathbb{R}^d$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On note $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ le produit scalaire dans $\mathbb{R}^d$, défini par

$$\langle x \mid y \rangle := \sum_{i=1}^{d} x^i y^i.$$

Rappelons qu'il s'agit d'une application bilinéaire symétrique, définie positive : elle vérifie les 3 propriétés suivantes.

a) **linéarité par rapport à la première composante :** pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $x, x', y \in \mathbb{R}^d$,

$$\langle \alpha x \mid y \rangle = \alpha \langle x \mid y \rangle ; \; \langle x + x' \mid y \rangle = \langle x \mid y \rangle + \langle x' \mid y \rangle .$$

b) **symétrie :** pour tout $x, y \in \mathbb{R}^d$,

$$\langle x \mid y \rangle = \langle y \mid x \rangle$$

c) **Positivité :** pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\langle x \mid x \rangle \geq 0;$$

Remarque : La positivité ne dit PAS que $\langle x \mid y \rangle \geq 0$. En effet, on peut tout à fait avoir $\langle x \mid y \rangle < 0$.

Exercice : Montrer que la linéarité par rapport à la première composante, associée à la symétrie, induisent la linéarité par rapport à le seconde composante.

Exercice : Montrer que

$$\langle x \mid x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$$

Le produit scalaire sur $\mathbb{R}^d$ définit la norme euclidienne associée comme suit :

$$\|x\| := \sqrt{\langle x \mid x \rangle}$$

PROPOSITION **4** *La norme euclidienne $\| \cdot \|$ est une norme sur $\mathbb{R}^d$*

Preuve. La première propriété se déduit du fait que le produit scalaire est défini positif et la seconde de la bilinéarité. La troisième se déduit de l'identité :

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x \mid y\rangle \tag{2.3}$$

et du lemme suivant :

LEMMA **1 (Cauchy-Schwartz)** *Soient $x, y \in \mathbb{R}^d$. Alors*

$$|\langle x \mid y\rangle| \leq \|x\|\|y\|.$$

Preuve de Cauchy-Schwartz et de l'identité (2.3). On commence par montrer C-S. Supposons que $y \neq 0$ (autrement l'inégalité est évidente). Introduisons le polynome P donné par

$$P(t) = \|x+ty\|^2 = \|x\|^2 + 2t\langle x \mid y\rangle + t^2\|y\|^2$$

Le discriminant associé est $\Delta = 4\langle x \mid y\rangle^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2$. Par définition, on a $P(t) \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Ainsi, le discriminant doit être négatif ou nul, ce qui signifie que

$$\langle x \mid y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$$

et le lemme est prouvé.

On montre maintenant (2.3). Soient $x, y \in \mathbb{R}^d$. On a

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 = \langle x+y \mid x+y\rangle &= \langle x \mid x\rangle + \langle x \mid y\rangle + \langle y \mid x\rangle + \langle y \mid y\rangle \\ &= \|x\|^2 + \|y^2\| + 2\langle x \mid y\rangle, \end{aligned}$$

où la première égalité est une conséquence de la linéarité et la seconde de la symétrie du produit scalaire. ■

On a alors :

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= \|x\|^2 + \|y^2\| + 2\langle x \mid y\rangle \\ &\leq \|x\|^2 + \|y^2\| + 2\|x\|\|y\| \\ &\leq (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

ce qui implique ($N3$). On a prouvé que $\|\cdot\|$ est une norme (la norme euclidienne). ■

Remarque : Lorsque $d = 1$, la norme euclidienne est la valeur absolue ($\|.\| \equiv |.|$). En effet, $\langle x \mid x\rangle = x^2$ et $\sqrt{x^2} = |x|$.
Sans précision contraire, on considère maintenant des suites $(x_n)_n$ de $\mathbb{R}^d$, c'est à dire que le terme général de la suite s'écrit $x_n = (x_n^1, \ldots, x_n^d)$, et $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne.

DEFINITION **5 (Boule de $\mathbb{R}^d$)** *Soit $x \in \mathbb{R}^d$ et $\epsilon > 0$. La boule de centre x et de rayon ϵ est l'ensemble de vecteur de $\mathbb{R}^d$ suivant :*

$$B(x,\epsilon) := \left\{ z \in \mathbb{R}^d : \ \|z-x\| < \epsilon \right\}.$$

DEFINITION **6** *Une suite* $(x_n)_n$ *de* $\mathbb{R}^d$ *converge vers* $x = (x^1, ..., x^d) \in \mathbb{R}^d$ *si on a la propriété suivante :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \|x_n - x\| < \epsilon \ \forall n \geq N.$$

En d'autres termes, x_n converge vers x si, pour tout $\epsilon > 0$, tous les termes de la suite $(x_n)_n$ se trouvent dans la boule centrée en x et de rayon ϵ ($x_n \in B(x,\epsilon)$), à partir d'un certain indice N (qui dépend de ϵ).

EXAMPLE **4** *La suite* $(x_n)_n = (1/n, 1/n^2, 1/\sqrt{n} + 2)$ *dans* $\mathbb{R}^3$ *converge vers* $(0,0,2)$*. En effet, soit* $\epsilon > 0$*, et* $N > E(\frac{1}{\epsilon^3})$*. Alors pour tout* $n \geq N$*, on a* $x_n^1 < \epsilon^3$*,* $x_n^2 < \epsilon^6$*, et* $x_n^3 < 2 + \epsilon^{3/2}$*. On peut aisément voir que à partir de N,* $\|x_n - x\| < \|(\epsilon^3, \epsilon^6, \epsilon^{3/2})\| < \epsilon$*.*

Dans l'exemple précédent, on peut remarquer que

$$\|x_n - x\| = \|(1/n, 1/n^2, 1/\sqrt{n})\| = \sqrt{1/n^2 + 1/n^4 + 1/n},$$

et que la suite réelle $y_n = \sqrt{1/n^2 + 1/n^4 + 1/n}$ tend vers 0. De manière générale, on peut considérer la suite $(\|x_n - x\|)_n$ comme une suite réelle. On a alors que $(x_n)_n$ converge vers x si et seulement si la suite réelle de terme général $\|x_n - x\|$ tend vers 0.

PROPOSITION **5** *Soit une suite* $(x_n)_n$ *de* $\mathbb{R}^d$ *telle que* $\|x_n - x\| \leq \alpha_n$*, où* α_n *converge vers* 0*. Alors* $(x_n)_n$ *converge vers* x*.*

Preuve. Une conséquence immédiate du corollaire 1 est que la suite réelle $(\|x_n - x\|)_n$ tend vers zéro. ■

Intuitivement, on constate qu'une suite $(x_n)_n$ de $\mathbb{R}^d$ converge vers x si la suite de chacune de ses d composantes converge vers la composante correspondante de u. C'est énoncé formellement dans la proposition suivante.

PROPOSITION **6** *Soit* $(x_n)_n$ *une suite de* $\mathbb{R}^d$*. On note* $x_n = (x_n^1, ..., x_n^d)$*. Alors* $(x_n)_n$ *converge vers* x *ssi, pour* $i = 1, ..., d$*, la suite réelle* $(x_n^i)_n$ *converge vers* x^i*.*

Preuve. Supposons tout d'abord sur $(x_n)_n$ converge vers x. Soit $i \in \{1, ..., d\}$. On a

$$|x_n^i - x^i|^2 \leq \|x_n - x\|^2.$$

Ainsi, puisque $\lim_n x_n = x$, on a $\lim_n \|x_n - x\| = 0$ et ainsi $\lim_n |x_n^i - x^i| = 0$.

Prouvons maintenant l'autre implication. Supposons que, pour tout $i = 1, ..., d$, on ait $\lim_n x_n^i = x^i$. Alors cela implique que $\|x_n^i - x^i\|$ tend vers 0, pour tout i. On a

$$\|x_n - x\|^2 = \sum_{i=1}^{d} (x_n^i - x^i)^2.$$

Le terme de droite est une somme de termes qui tendent tous vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Ainsi $\lim_n \|x_n - x\|^2 = 0$. Par passage à la limite (la fonction racine est continue sur $\mathbb{R}^+$), $\lim_n \|x_n - x\| = 0$. ■

PROPOSITION **7 (Algèbre)** *Soient* $(x_n)_n$ *et* $(y_n)_n$ *deux suites de* $\mathbb{R}^d$ *convergeant respectivement vers* x *et* y*, et* $(\lambda_n)_n$ *une suite réelle convergeant vers* λ*. Alors*

1) $(x_n + y_n)_n$ *converge vers* $x + y$ *;*
2) $(\lambda_n x_n)_n$ *converge vers* λx *;*
3) *la suite* $(\|y_n\|)_n$ *converge vers* $\|y\|$ *;*
4) $(\langle x_n \mid y_n\rangle)_n$ *converge vers* $\langle x \mid y\rangle$*.*

Preuve. La preuve des deux premiers points est très similaire au cas $d = 1$ (section précédente). Pour le troisième point, on remarque que, par l'inégalité triangulaire,

$$\|y_n\| - \|y\| \le \|y_n - y\|.$$

De même, on a

$$\|y\| - \|y_n\| \le \|y - y_n\|.$$

Ainsi

$$|\|y_n\| - \|y\|| \le \|y_n - y\|,$$

et 3) s'en déduit.

Pour ce qui est du dernier point, on a

$$\begin{aligned} |\langle x_n \mid y_n\rangle - \langle x \mid y\rangle| &\le |\langle x_n - x \mid y_n\rangle| + |\langle x \mid y_n - y\rangle| \\ &\le \|x_n - x\|\|y_n\| + \|x\|\|y_n - y\|. \end{aligned}$$

Il suffit de montrer que le terme de droite tend vers 0 et on aura prouvé le point 4). Il suffit pour cela de voir que $(\|y_n\|)_n$ converge vers $\|y\|$ donc le terme de droite converge vers $0 \times \|y\| + \|x\| \times 0 = 0$. ■

DEFINITION **7** *Une suite* $(x_n)_n$ *de* $\mathbb{R}^d$ *est bornée s'il existe* $M > 0$ *tel que* $\|x_n\| \le M,\ \forall n$*.*

PROPOSITION **8** *Soit une suite* $(x_n)_n$ *de* $\mathbb{R}^d$*. Si* $(x_n)_n$ *converge alors elle est bornée.*

Preuve. Voir exercices. ■

Un concept important est celui de suite extraite (ou sous-suite). Soient $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ des entiers naturels et $(x_n)_n$ une suite de $\mathbb{R}^d$. On note $(x_{n_k})_k$ la suite $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots$. On dira qu'il s'agit d'une suite extraite (ou sous-suite) de $(x_n)_n$.

EXAMPLE **5** *Soit* $(x_n)_n$ *la suite définie par* $x_0 = 1, x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = -1, \ldots$*. En prenant* $n_k = 2k$*, on peut définir la sous-suite* $(x_{2k})_k$*, dont les termes successifs sont* $1, 1, 1, 1, \ldots$*.*

PROPOSITION **9** *Si* $(x_n)_n$ *converge vers une limite* x*, alors toutes ses sous-suites convergent également vers* x*.*

Preuve. C'est une conséquence immédiate de la définition de limite. Soit une sous-suite $(x_{n_k})_k$. Etant donné $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|x_n - x\| < \epsilon$ pour tout $n \geq N$. Mais dans ce cas, pour tout k tel que $n_k \geq N$, on a également $\|x_{n_k} - x\| < \epsilon$, ce qui conclue la preuve. ■

Néanmoins, en général, plusieurs sous-suites peuvent converger vers des limites différentes. Dans ce cas, la suite initiale n'est pas convergente. Dans l'exemple précédent, la suite $(x_n)_n$ n'est pas convergente. La sous-suite d'indices pairs converge vers 1 et la sous-suite d'indices impairs converge vers -1.

2.1.3 Exercices

EXERCICE **1** *Démontrer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.*

1) $lim_n u_n = 0 \Longleftrightarrow lim_n |u_n| = 0$
2) $lim_n u_n = -1 \Longleftrightarrow lim_n |u_n| = 1$
3) $lim_n u_n = -1 \Longrightarrow lim_n |u_n| = 1$

EXERCICE **2** *Soient u et v deux suites de réels de* $[0,1]$ *telles que* $\lim_{n\to+\infty} u_n v_n = 1$. *Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers* 1.

EXERCICE **3** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}$. Que pensez-vous des propositions suivantes :*
• *Si $(u_n)_n$ converge vers un réel ℓ alors $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers ℓ.*
• *Si $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont convergentes, il en est de même de $(u_n)_n$.*
• *Si $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont convergentes, de même limite ℓ, il en est de même de $(u_n)_n$.*

EXERCICE **4** *(**) Soit $(x_n)_n$ une suite réelle On note*

$$\overline{x}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

1) *On suppose que $(x_n)_n$ converge vers $x \in \mathbb{R}$.*
   a) *Soit $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, on a*

$$|\overline{x}_n - x| \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} |x_i - x| + \frac{n-N}{n}\frac{\epsilon}{2}.$$

   b) *Montrer que la suite de terme général $\overline{x}_n$ converge vers x.*
2) *Montrer que si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, la suite $(\overline{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Réciproque ?*
3) *Montrer que si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante alors la suite $(\overline{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est aussi.*

EXERCICE **5** *Soit $(x_n)_n$ une suite bornée de $\mathbb{R}^d$ et $(y_n)_n$ une suite réelle qui converge vers* 0. *Montrer que la suite de terme général $y_n x_n$ converge vers* 0 *(indication : majorer $\|y_n x_n\|$ par une quantité qui ne dépend que de y_n).*

EXERCICE **6** *(*) Soit* $(x_n)_n$ *une suite de* $\mathbb{R}^d$ *convergeant vers* x*. Montrer qu'il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que, pour tout* $n \geq N$*,*

$$\|x_n\| \leq \|x\| + 1.$$

En déduire que $(x_n)_n$ *est bornée.*

EXERCICE **7** *(**) Soit* $(x_n)_n$ *une suite de* $\mathbb{R}^d$*. On dira que* $(x_n)_n$ *est une suite de Cauchy si, pour tout* $\epsilon > 0$*, il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que* $\|x_n - x_m\| < \epsilon$ *pour tout* $n, m \geq N$*.*

1) *Montrer que toute suite convergente* $(x_n)_n$ *est une suite de Cauchy ;*
2) *Montrer que toute suite de Cauchy est bornée ;*
3) *Montrer que, si une suite de Cauchy* $(x_n)_n$ *admet une sous-suite convergeant vers* l*, alors* $(x_n)_n$ *converge également vers* l*.*

EXERCICE **8** *(**) L'objectif de cet exercice est de montrer que la suite de terme général* $x_n = \sin(n)$ *ne converge pas. On rappelle*

$$\sin^2(a) + \cos^2(a) = 1,\ \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a),\ \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

On procède ici par l'absurde. On suppose que $(x_n)_n$ *converge vers* $l \in \mathbb{R}$ *et on va tenter d'aboutir à une contradiction.*

1) *Montrer que*
$$\sin(n+1) - \sin(n-1) = 2\sin(1)\cos(n).$$
2) *En utilisant que* $\lim_n x_n = l$*, montrer que* $\lim_n \cos(n) = 0$*.*
3) *Montrer que* $l = 0$*.*
4) *Conclure par l'absurde.*

EXERCICE **9** *(*) Soient* $(x_n)_n$ *une suite croissante et* $(y_n)_n$ *une suite décroissante vérifiant la propriété suivante :*

$$\lim_n (y_n - x_n) = 0.$$

1) *Montrer que* $y_n \geq x_n$ *pour tout* n*.*
2) *Montrer que* $(x_n)_n$ *est majorée et que* $(y_n)_n$ *est minorée.*
2) *Montrer que* $(x_n)_n$ *et* $(y_n)_n$ *convergent vers la même limite.*

EXERCICE **10** *Montrer qu'une suite d'entiers qui converge est constante à partir d'un certain rang.*

2.2 topologie dans $\mathbb{R}^d$

2.2.1 Ouverts de $\mathbb{R}^d$

On a introduit plus haut la notion de boule dans $\mathbb{R}^d$. Pour rappel : Soit $x \in \mathbb{R}^d$ et $\epsilon > 0$. La boule de centre x et de rayon ϵ est l'ensemble de vecteurs de $\mathbb{R}^d$ donné par :

$$B(x,\epsilon) := \left\{ z \in \mathbb{R}^d : \ \|z - x\| < \epsilon \right\}.$$

Nous pouvons alors définir le concept d'ensemble ouvert :

DEFINITION **8** *Un sous-ensemble U de $\mathbb{R}^d$ est ouvert si, pour tout $x \in U$, il existe ϵ tel que $B(x,\epsilon) \subset U$.*

Un ensemble ouvert contenant le point x est appelé voisinage de x. Une manière d'interpréter la définition d'ouvert est la suivante : partant de n'importe quel point d'un ensemble ouvert U, on peut se déplacer dans n'importe quelle direction tout en restant dans l'ensemble U.

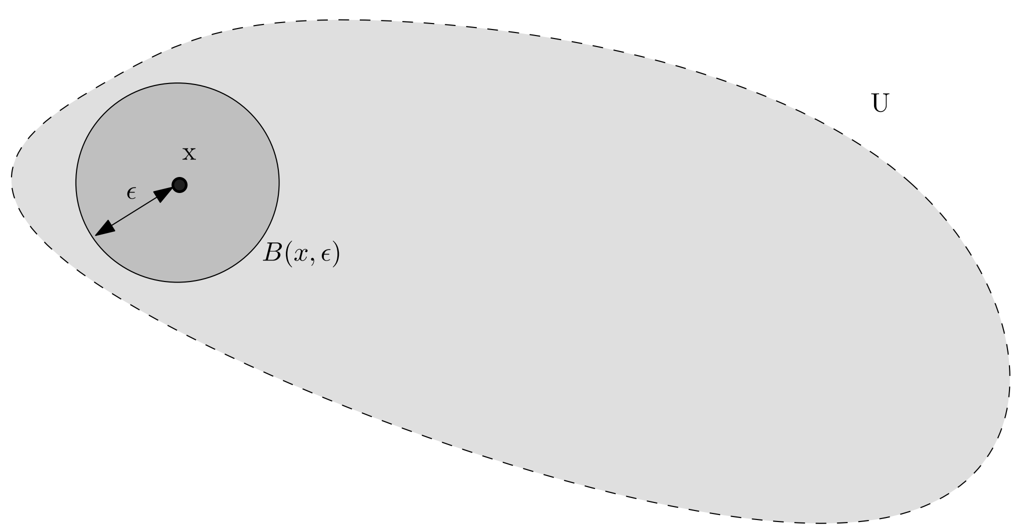

FIGURE 2.1 – *les points à la "frontière" ne sont pas dans U.*

REMARQUE **1** *Quelques commentaires :*

1) *L'intervalle $U =]0,1[$ est un ensemble ouvert de $\mathbb{R}$. En effet, soit $x \in U$: cela signifie que $0 < x < 1$. Soit $\epsilon > 0$ choisi tel que $\epsilon < 1 - x$ et $\epsilon < x$ (par exemple, on peut prendre*

$\epsilon = \min\{x/2, (1-x)/2\}$). On a alors $0 < x-\epsilon < x+\epsilon < 1$. Ainsi on a $B(x,\epsilon) =]x-\epsilon, x+\epsilon[\subset]0,1[= U$.
A contrario, l'ensemble $U' =]0,1]$ n'est pas ouvert. En effet, il existe une boule ouverte autour de chaque point de U', sauf autour du point $x = 1$. Ainsi, $B(1,\epsilon) =]1-\epsilon, 1+\epsilon[$, et pour tout $\epsilon > 0$, il existe un point de $B(1,\epsilon)$ qui n'est pas inclus dans U' (par exemple le point $1+\frac{\epsilon}{2}$).

2) *Il n'est pas difficile de montrer que $B(x,r)$ est un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R}^d$. Ceci est dû à l'inégalité stricte dans la définition d'une boule. Soit $y \in B(x,r)$. Il faut montrer qu'il existe $\epsilon' > 0$ tel que $B(y,\epsilon) \subset B(x,r)$. Soit $\delta = \|y-x\| < r$. On pose $\epsilon := r-\delta$. On montre maintenant que $B(y,\epsilon) \subset B(x,r)$. Soit $z \in B(y,\epsilon)$. On a*

$$\|z-x\| \leq \|z-y\| + \|y-x\| < \epsilon + \delta = r.$$

Le résultat est prouvé.

3) *Un ensemble ouvert de $\mathbb{R}^d$ devra toujours être "de dimension d". Par exemple, dans $\mathbb{R}^2$, l'ensemble $\{(x,0),\ x \in]0,1[\}$, qui correspond au segment ouvert $]0,1[$ plongé dans le plan n'est pas un ensemble ouvert de $\mathbb{R}^2$. Si l'on considère un point $(x,0)$ de ce segment, toute boule de $\mathbb{R}^2$ centrée en $(x,0)$ contient des éléments non situés sur la droite.*
4) *Bien entendu, $\mathbb{R}^d$ est un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Par convention, l'ensemble vide est également ouvert. En effet, Puisque il ne contient aucun x, toute assertion du type " pour tout $x \in U$, ..." est forcément vérifiée sur l'ensemble vide.*

PROPOSITION **10** *Soit $(U_i)_i$ une famille d'ensemble ouverts de $\mathbb{R}^d$*

a) *Alors $U = \cup_i U_i$ est ouvert ;*
b) *Si cette famille est **finie**, alors $V := \cap_i U_i$ est ouvert.*

Preuve. La première propriété est simple. Soit $x \in U = \cup_i U_i$. Cela signifie qu'il existe i_0 tel que $x \in U_{i_0}$. Puisque U_{i_0} est ouvert, il existe $\epsilon > 0$ tel que $B(x,\epsilon) \subset U_{i_0} \subset U$. Donc U est ouvert.

Soit $x \in V = \cap_i U_i$. Le point x appartient à tous les ensembles U_i donc, pour chaque i, il existe $\epsilon_i > 0$ tel que $B(x,\epsilon_i) \subset U_i$. Posons $\epsilon = \min_i\{\epsilon_i\}$. Le minimum d'un nombre fini de nombres réels strictement positifs est strictement positif. Ainsi $\epsilon > 0$. On a donc pour tout i

$$B(x,\epsilon) \subset B(x,\epsilon_i) \subset U_i.$$

On obtient donc $B(x,\epsilon) \subset \cap_i U_i = V$. ■

EXAMPLE **6** *Soit $U_1 =]0,1[$ et $U_2 =]\frac{1}{2}, 2[$. Alors $U_1 \cup U_2$ et $U_1 \cap U_2$ sont ouverts. Si $U_3 = [\frac{1}{2}, 2[$, alors $U_1 \cup U_3$ est ouvert mais $U_1 \cap U_3$ ne l'est pas.*

REMARQUE **2** *Le point b ne tient que parce que la famille est finie. Soit $V_n =]-1-1/n, 1+1/n[$. Alors l'intersection infinie de tous les V_n correspond au segment $[-1,1]$ qui n'est pas ouvert.*

DEFINITION **9** *Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$. On note $Int(A)$ l'intérieur de A égal à la réunion de tous les ensembles ouverts contenus dans A.*

Par la proposition précédente, l'intérieur de A est un ensemble ouvert de $\mathbb{R}^d$. En fait, il s'agit du plus grand ensemble ouvert inclus dans A. Bien entendu $A = Int(A)$ ssi A est ouvert.

2.2.2 Fermés, compacts de $\mathbb{R}^d$

DEFINITION **10** *Un sous-ensemble F de $\mathbb{R}^d$ est fermé si son complémentaire est ouvert.*

EXAMPLE **7**
L'ensemble $U = [0,1]$ est fermé dans $\mathbb{R}$, car son complémentaire dans $\mathbb{R}$ est ouvert.
Le singleton $\{a\}$ est fermé dans $\mathbb{R}$ pour la même raison.
L'ensemble $U' =]0,1[$ n'est pas fermé. La raison n'est pas que U' est ouvert, mais bien que le complémentaire de U' n'est pas ouvert.
L'ensemble $U'' = [0,+\infty[$ est fermé. En effet, son complémetaire est ouvert.

THEOREM **5 (Caractérisation par les suites)** *$F \subset \mathbb{R}^d$ est fermé si et seulement si pour toute suite convergente $(x_n)_n$ d'éléments de F, la limite $x \in \mathbb{R}^d$ est un élément de F.*

Preuve. Supposons que F est fermé et considérons une suite $(x_n)_n$ de F, admettant une limite x. Il faut montrer que $x \in F$. Supposons que ce n'est pas vrai : $x \in F^c$. Par définition F^c est un ensemble ouvert donc il existe $\epsilon > 0$ tel que $B(x,\epsilon) \subset F^c$. Puisque $(x_n)_n$ converge vers x, il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, on a $x_n \in B(x,\epsilon)$, ce qui implique que $x_n \in F^c$ pour $n \geq N$. C'est une contradiction. On a donc prouvé que $x \in F$.

Il faut maintenant prouver l'implication inverse : si toute suite convergente $(x_n)_n$ a sa limite dans F, alors F est fermé. Procédons par contraposée. Supposons que F n'est pas fermé (c'est à dire que F^c n'est pas ouvert). On doit montrer qu'il existe une suite $(x_n)_n$ de F qui converge vers $x \in F^c$. Si F^c n'est pas ouvert, il existe $x \in F^c$ tel que, pour tout $\epsilon > 0$ (Attention à la négation de la définition d'un ouvert - le "il existe" devient "pour tout"), $B(x,\epsilon)$ n'est pas inclus dans F^c. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B(x,1/n)$ n'est pas inclus dans F^c. Donc $B(x,1/n) \cap F \neq \emptyset$. Cela signifie que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in F \cap B(x,1/n)$. La suite $(x_n)_n$ converge vers x car $\|x_n - x\| < 1/n$. On a donc trouvé une suite $(x_n)_n$ de F qui converge vers $x \in F^c$. La contraposée est prouvée. ■

REMARQUE **3** *Quelques commentaires :*

a) *On trouve parfois la caractérisation par les suites comme définition d'un fermé et le fait que le complémentaire est ouvert comme caractérisation.*
b) *Il faut bien comprendre que, si un ensemble n'est pas ouvert, cela n'implique pas nécessairement qu'il est fermé (voir exercices)*

PROPOSITION **11** *Soit $(F_i)_i$ une famille d'ensemble fermés de $\mathbb{R}^d$.*

a) *Alors* $F = \cap_i F_i$ *est fermé ;*
b) *Si cette famille est* ***finie****, alors* $\cup_i F_i$ *est fermé.*

Preuve. Nous rappelons les lois de De Morgan : Si A et B sont des parties de E, alors

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

En généralisant,

$$(\cap_i F_i)^c = \cup_i F_i^c$$
$$(\cup_i F_i)^c = \cap_i F_i^c$$

a) Puisque tous les F_i sont fermés, tous les F_i^c sont ouverts donc l'union des F_i^c est ouvert. Par conséquent $(\cap_i F_i)^c$ est ouvert et donc $\cap_i F_i$ est fermé.
b) Tous les F_i^c sont ouverts, donc s'il y en a une famille finie, $\cap_i F_i^c$ est ouvert, donc $(\cup_i F_i)^c$ aussi, et $\cup_i F_i$ est fermé. ■

DEFINITION **11** *Soit* $A \subset \mathbb{R}^d$. *On appelle* <u>*fermeture de A*</u> *l'intersection de tous les fermés contenant A, et on la note* $\overline{A}$.

l'ensemble $\overline{A}$ est donc le plus petit fermé contenant A. Bien entendu, $A = \overline{A}$ si et seulement si A est fermé.

LEMMA **2** *Soit* $x \in \overline{A}$. *Alors pour tout* $\epsilon > 0$*, on a* $B(x,\epsilon) \cap A \neq \emptyset$.

Preuve : Soit $x \in \overline{A}$. Supposons qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $B(x,\epsilon) \cap A = \emptyset$. Alors notons $F = \overline{A} \cap (B(x,\epsilon))^c$. Clairement F est fermé et il ne contient pas x donc $F \subset \overline{A}$ et $F \neq \overline{A}$. De plus $A \subset F$. Par conséquent, F est un fermé contenant A. Ceci est en contradiction avec la définition de $\overline{A}$. ■

Nous pouvons maintenant prouver la caractérisation suivante de la fermeture de A.

PROPOSITION **12** *Soit A un sous-ensemble de* $\mathbb{R}^d$. *Alors* $x \in \overline{A}$ *ssi il existe une suite de A qui converge vers x*

Preuve. Soit $x \in \overline{A}$ et $n \in \mathbb{N}$. Comme on l'a vu plus haut, $B(x, 1/n) \cap A \neq \emptyset$. Il existe donc $x_n \in A$ tel que $\|x_n - x\| < 1/n$. Par conséquent, $(x_n)_n$ converge vers x.

On montre maintenant l'autre sens. Supposons qu'il existe une suite $(x_n)_n$ de A qui converge vers x. On montre alors que x appartient à $\overline{A}$. Puisque $(x_n)_n$ est une suite de A, c'est aussi une suite de $\overline{A}$, qui est fermé. Puisque $(x_n)_n$ converge, sa limite x est dans $\overline{A}$. ■

DEFINITION **12 (Frontière)** *Soit* $A \subset \mathbb{R}^d$. *On appelle frontière de A, l'ensemble* $Fr(A) := \overline{A} \setminus Int(A)$.

On remarquera que l'on peut aussi écrire $Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{A^c}$. Les éléments de la frontière peuvent être vus comme les points de $\mathbb{R}^d$ étant arbitrairement proches de points de A et de points du complémentaire de A (voir exercices).

DEFINITION **13** *Soit $A \subset \mathbb{R}^d$. On dit que A est borné s'il existe $M > 0$ tel que*

$$\|x\| \leq M, \ \forall x \in A.$$

Attention : Dans $\mathbb{R}$, la définition ne dit pas que $x \leq M$ (ce qui donnerait simplement un majorant, elle dit bien que $|x| \leq M$ (ce qui garantit donc un majorant et un minorant). Par exemple, l'ensemble $[-2, 1]$ n'est pas borné par 1, car $|-2| = 2 > 1$. Il est en revanche borné par 2.

DEFINITION **14 (Compact)** *Un sous-ensemble $K \subset \mathbb{R}^d$ est dit <u>compact</u> s'il est fermé et borné.*

Dans $\mathbb{R}$, tout intervalle de la forme $[a, b]$, avec $-\infty < a < b < +\infty$ est compact. Par contre, $[a, +\infty[$ n'est pas compact (bien qu'il soit fermé), et $[a, b[$ non plus (bien qu'il soit borné).

Par la proposition précédente, toute intersection de fermés est fermée. Puisque toute interesection d'ensembles bornés est également bornée, l'intersection de compacts est compacte ; De même, toute union finie de compacts est compacte, puisque qu'elle est fermée et également bornée.

Le théorème suivant est très important :

THEOREM **6 (Bolzano-Weierstrass)** *un sous-ensemble $K \subset \mathbb{R}^d$ est compact ssi, de toute suite $(x_n)_n$ de K, on peut extraire une sous-suite qui converge dans K.*

Avant de donner la preuve de ce résultat, faisons quelques remarques sur ce théorème.
1- Notons que dans un compact, il y a des suites qui peuvent ne pas converger. Par exemple, la suite -1,1,-1,1... ne converge pas. Cela dit l'ensemble $\{-1\} \cup \{1\}$ est compact. En effet, dans la suite -1,1,-1,1... il y a une sous-suite qui converge. Pour être compact, il n'est donc pas nécessaire que toutes les suistes convergent.
2- Dans $\mathbb{R}$, la suite 1,2,3, 4... ne converge pas, et aucune de ses sous-suite ne converge. Le théorème nous dit donc que $\mathbb{R}$ n'est pas compact. Le fait que cette suite n'est pas bornée nous dit que $\mathbb{R}$ ne l'est pas non plus
3- Enfin, l'ensemble $]0, 1]$ n'est pas compact. En effet, la suite d'élément général $1/n$ a tous ses éléments dans $]0, 1]$, elle converge vers 0, donc toutes les sous suites aussi. Pourtant, $0 \notin K$, donc $]0, 1]$ n'est pas fermé.

Preuve. Tout d'abord, on vérifie facilement que si, de toute suite de K, l'on peut toujours extraire une sous-suite convergente dans K, alors K est fermé et borné. Soit $(x_n)_n$ une suite de K qui converge vers $x \in \mathbb{R}^d$. Par hypothèse, elle admet une sous-suite qui converge dans

K. Donc $x \in K$. Par caractérisation des ensembles fermés, K est donc fermé. Supposons maintenant que K n'est pas borné. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in K$ tel que $\|x_n\| > n$. Il est facile de vérifier qu'une sous-suite quelconque de la suite $(x_n)_n$ ainsi construite ne converge pas (elle n'est pas bornée !).

Nous prouvons l'implication inverse dans le cas particulier d'un intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$.

Etape 0. Posons $a_0 = a, b_0 = b$. On note $c_0 = (a_0 + b_0)/2$. Un des deux ensembles (au moins) $[a_0, c_0]$ ou $[c_0, b_0]$ contient une infinité de termes de la suite $(x_n)_n$.

Etape 1. Si $[a_0, c_0]$ est infini, on pose $a_1 = a_0$ et $b_1 = c_0$; sinon, on pose $a_1 = c_0$ et $b_1 = b_0$. Le segment $[a_1, b_1]$ contient donc une infinité de termes de $(x_n)_n$. On pose $c_1 = (a_1 + b_1)/2$. Un des deux intervalles $[a_1, c_1]$ et $[c_1, b_1]$ contient une infinité de termes de $(x_n)_n$.

Etape k. Si $[a_{k-1}, c_{k-1}]$ est infini, on pose $a_k = a_{k-1}$ et $b_k = c_{k-1}$; sinon, on pose $a_k = c_{k-1}$ et $b_k = b_{k-1}$. Le segment $[a_k, b_k]$ contient donc une infinité de termes de $(x_n)_n$. On pose $c_k = (a_k + b_k)/2$. Un des deux intervalles $[a_k, c_k]$ et $[c_k, b_k]$ contient une infinité de termes de $(x_n)_n$.

On continue ainsi. De cette manière, on a construit deux suites adjacentes $(a_k)_k$ et $(b_k)_k$ (le vérifier !). On sait donc que $(a_k)_k$ et $(b_k)_k$ convergent vers la même limite $l \in [a,b]$. Nous allons montrer que l est la limite d'une certaine sous-suite de $(x_n)_n$.

On pose $n_0 = 0$, donc $x_{n_0} = x_0$. Ensuite, on choisit $n_1 > 0$ tel que $x_{n_1} \in [a_1, b_1]$ (possible car $[a_1, b_1]$ contient une infinité de termes de la suite), puis $n_2 > n_1$ tel que $x_{n_2} \in [a_2, b_2]$ (même argument, $[a_2, b_2]$ contient une infinité de termes de la suite) etc... A l'étape k, on choisit $n_k > n_{k-1}$ tel que $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$. Finalement, on a construit une sous-suite $(x_{n_k})_k$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$. On a

$$a_k \le u_{n_k} \le b_k.$$

Puisque les deux suites $(a_k)_k$ et $(b_k)_k$ convergent vers l, on a $\lim_k x_{n_k} = l \in [a,b]$. On a construit une sous-suite de $(x_n)_n$ qui converge vers une limite $l \in [a,b]$. ■

2.2.3 Exercices

EXERCICE **11** *(*) Soit $r > 0$ et $x \in \mathbb{R}^d$. On note $B_f(x,r) := \{y \in \mathbb{R}^d : \|x-y\| \le r\}$. Montrer que $B_f(x,r) = \overline{B(x,r)}$.*

EXERCICE **12** *(*) Soit $U_n =]-1/n, 1/n[$. A quoi est égal l'ensemble $V := \cap_{i=1}^{+\infty} U_i$? V est-il ouvert ?*

EXERCICE **13** *(*) Soit $A \subset \mathbb{R}^d$ et $x \in Int(A)$. Soit $(x_n)_n$ une suite de $\mathbb{R}^d$ qui converge vers x. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \ge N$, $x_n \in A$.*

EXERCICE **14** *Soit* $A = [0,1[$. *A est-il un sous-ensemble ouvert de* $\mathbb{R}$ *? fermé ?, les deux ?*

EXERCICE **15** *(**) Soit* $A \subset \mathbb{R}^d$. *Montrer que* $(Int(A))^c = \overline{A^c}$.

EXERCICE **16** *(*) Montrer que* $Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{A^c}$. *Soit* $x \in Fr(A)$ *et* $\epsilon > 0$. *Montrer que la boule de centre* x *et de rayon* ϵ *intersecte* A *et* A^c.

EXERCICE **17** *Soit* K *un sous-ensemble compact de* $\mathbb{R}^d$ *et* $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. Montrer que l'ensemble* $f(K) = \{f(x) : x \in K\}$ *est compact.*

EXERCICE **18** *(**) Soit* A *un sous-ensemble* ***non vide*** *de* $\mathbb{R}^d$ *tel que* $A \neq \mathbb{R}^d$. *Soit* $x \in A$ *et* $y \notin A$. *On note* $[x,y]$ *le segment de droite entre les points* x *et* y *:*

$$[x,y] := \{tx + (1-t)y : t \in [0,1]\}.$$

1) *On note* $\phi : t \in [0,1] \mapsto tx + (1-t)y$. *Soit* $t_0 := \inf\{t \geq 0 : \phi(t) \in A\}$. *Montrer que* t_0 *est bien défini.*
2) *Montrer que* $\phi(t_0) \in \overline{A^c}$.
3) *Montrer que* $\phi(t_0) \in \overline{A}$ *en faisant un raisonnement par l'absurde. En déduire que* $\phi(t_0) \in Fr(A)$.
4) *Montrer que A ne peut pas être à la fois ouvert et fermé (indication : on pourra montrer qu'un ensemble ouvert et fermé a une frontière vide).*

EXERCICE **19** *(**) Soit* $(U_i)_{i\in I}$ *une famille d'ouverts de* $\mathbb{R}^d$. *On dit que* $(U_i)_{i\in I}$ *est un recouvrement ouvert de* A *si* $A \subset \cup_{i\in I} U_i$. *Soit* K *un compact de* $\mathbb{R}^d$ *et* $(U_i)_{i\in I}$ *un recouvrement ouvert de* K. *Le but de l'exercice est de montrer le résultat suivant :*

"Soit K une partie compacte de $\mathbb{R}^d$. *et* $(U_i)_{i\in I}$ *un recouvrement ouvert de K. Alors il existe un sous recouvrement fini :* $\exists i_1, \ldots, i_p \in I$ *tels que* $K \subset \cup_{i=1}^p U_i$*".*

1) *Montrer par l'absurde la proposition suivante*

$$\exists \epsilon > 0,\ \forall x \in K,\ \exists i(x) \in I : B(x,\epsilon) \subset U_{i(x)}.$$

2) *Montrer qu' il existe* $x_1, \ldots, x_m$ *tels que* $K \subset \cup_{j=1}^p B(x_j, \epsilon)$.
3) *Conclure.*