Eléments de mathématiques

S. Bervoets - M. Faure

Table des matières

Chapitre 1

Eléments de Logique, raisonnements

Man : Oh look, this isn't an argument.

Arguer : Yes it is.

M : No, it isn't. It's just contradiction.

A : No, it isn't.

M : It is !

A : It is not.

M : Look, you just contradicted me.

A : I did not.

M : Oh, you did ! !

A : No, no, no.

M : You did just then.

A : Nonsense !

M : Oh, this is futile !

A : No, it isn't.

M : I came here for a good argument.

A : No, you didn't ; no, you came here for an argument.

M : An argument isn't just contradiction.

A : It can be.

M : No, it can't. An argument is a connected series of statements intended to establish a proposition.

A : No, it isn't.

M : Yes it is ! It's not just contradiction.

A : Look, if I argue with you, I must take up a contrary position.

M : Yes, but that's not just saying 'No, it isn't.'

A : Yes, it is !

M : No, it isn't !

A : Yes, it is !

M : Argument is an intellectual process. Contradiction is just the automatic gainsaying of any statement the other person makes.

(short pause)

A : No, it isn't.

Mathematics consist in making *precise* statements and proving whether they are true or false. A *proof* is a series of arguments that are logically *valid*, and that lead from some premise to a conclusion. Premises are *propositions* or *assertions*, while the conclusion is the statement. A statement that is true is a *theorem*.

Some arguments are correct, some are not.

If it is snowing, then it is cold outside.
It is snowing.
Therefore, it is cold outside.

If it is snowing, then it is cold outside.
It is cold outside .
Therefore, it is snowing.

Either you are an Olympique de Marseille fan or a Paris Saint Germain fan.
You are not a PSG fan.
Therefore, you are an Olympique de Marseille fan.

All humans are green.
Some green things are edible
Therefore, some humans are edible.

All humans are green.
Some green things are not edible .
Therefore, some humans are not edible.

All glorphs are wibbles
All wibbles are fnoffles.
Therefore, all glorphs are fnoffles.

All glorphs are wibbles
Some wibbles are fnoffles.
Therefore, some glorphs are fnoffles.

Some politicians are cheaters
No woman cheats
Therefore, no women is a politician

If it has rained, then the grass is wet
The grass is wet

Therefore, it has rained.

The objective of this section is to classify which arguments are correct and which are not, and to know which tools can be used to prove that statements are true or false.

A last example : A logician and his friend.
- Logician : "I just had a baby"
- Friend : "Congratulations ! Is it a boy or a girl ?"
- Logician : "Yes"

1.1 Calcul propositionnel

1.1.1 Définition d'une proposition

Une *proposition* (ou *assertion*) est un énoncé pouvant être vrai ou faux mais pas les deux en même temps. On utilise en général les lettres P, Q, R etc. pour désigner les propositions. Exemples :

— *Il pleut.*
— *Je suis plus grand que toi.*
— $2+2=4$
— $2\times 3=7$
— $x^2 \geq 0$

L'énoncé de la dernière proposition dépend de x. On va alors écrire $P(x): x^2 \geq 0$.

— *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $P(x)$.
— $P(x,y): x+y>2$
— $P(x,y,z,n):\ x^n+y^n=z^n$
— *Il n'existe pas de* $x,y,z,n \in (\mathbb{N}^*)^4$, $n \geq 3$ *tels que* $P(x,y,z,n)$

La dernière proposition est le théorème de Fermat. A partir d'une ou plusieurs propositions, on peut en construire d'autres, en utilisant des *connecteurs*. Le statut (vrai ou faux) de la nouvelle proposition se déduit d'une *table de vérité*.
Nous allons définir 5 connecteurs logiques permettant de construire des propositions complexes. Pour illustrer, supposons que

P : "J'aime les mathématiques"
Q : "J'aime l'économie"

$\overline{P}$: "Je n'aime pas les mathématiques"
$P \wedge Q$: "J'aime les mathématiques et j'aime l'économie"
$P \vee Q$: "J'aime les mathématiques ou l'économie"
$P \implies Q$: "Si j'aime les mathématiques, alors j'aime l'économie"
$P \iff Q$: "J'aime les mathématiques si et seulement si j'aime l'économie"

1.1.2 Les connecteurs logiques « et » et « ou »

Soient P et Q deux propositions. On peut définir la proposition « P et Q », notée $P \wedge Q$ par la table de vérité ci-dessous.

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Par exemple si P est l'assertion *Cette carte est un as* et Q l'assertion *Cette carte est cœur* alors l'assertion P *et* Q est vraie si la carte est l'as de cœur et est fausse pour toute autre carte.

On définit aussi la proposition « P ou Q », notée $P \vee Q$, par la table de vérité suivante :

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Si P est l'assertion *Cette carte est un as* et Q l'assertion *Cette carte est cœur* alors l'assertion P *ou* Q est vraie si la carte est un as ou bien un cœur (en particulier elle est vraie pour l'as de cœur).

COMMENTAIRE **1**
- *On peut noter que $P \vee Q$ est fausse si et seulement si P et Q sont fausses alors que $P \wedge Q$ est vraie si et seulement si P et Q sont vraies.*
- *Il existe en français deux significations du mot « ou ». Il y a le « ou exclusif » qui signifie « soit l'un, soit l'autre, mais pas les deux » et le « ou inclusif » qui signifie « soit l'un, soit l'autre, soit les deux ». $\vee$ est le « ou inclusif ».*

1.1.3 Négation d'une proposition

Soit P une proposition. On définit sa négation, notée $\overline{P}$ (ou aussi non$P$ ou $\rceil P$), à partir de sa table de vérité.

P	$\overline{P}$
V	F
F	V

Cette simple table contient en germe un très grand nombre d'erreurs de raisonnement à venir et ceci dans à peu près tous les chapitres. On doit déjà avoir conscience que la négation de « ce chat est blanc » est, non pas « ce chat est noir », mais tout simplement « ce chat n'est pas blanc » ou que le contraire de la phrase « f est la fonction nulle » est, non pas « f ne s'annule pas », mais « f n'est pas la fonction nulle » ou encore « f ne s'annule pas en au moins un point ». Enfin, le contraire de la phrase « $x \geqslant 0$ » est « $x < 0$ », et non pas « $x \leqslant 0$ ».

1.1.4 Implication logique $\Longrightarrow$

Si P et Q sont deux propositions, on définit l'implication logique $P \Rightarrow Q$ par sa table de vérité.

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

L'assertion $P \Longrightarrow Q$ se lit en français P *implique* Q.
Elle se lit souvent aussi *si P est vraie alors Q est vraie* ou *si P alors Q*.

Par exemple :

— $0 \leq x \leq 25 \Longrightarrow \sqrt{x} \leq 5$ est vraie (prendre la racine carrée).
— $x \in]-\infty, -4[\Longrightarrow x^2 + 3x - 4 > 0$ est vraie (étudier le binôme).
— $\sin(\theta) = 0 \Longrightarrow \theta = 0$ est fausse (regarder pour $\theta = 2\pi$ par exemple).
— $2 + 2 = 5 \Longrightarrow \sqrt{2} = 2$ est vraie ! Eh oui, si P est fausse alors l'assertion $P \Longrightarrow Q$ est toujours vraie.

Illustrons pourquoi « (Faux $\Rightarrow$ Faux) est vraie ».

Vérifions que, pour tout entier naturel n, [(10^n+1 divisible par 9) $\Rightarrow$ (10^{n+1}+1 divisible par 9)].

Soit $n \in \mathbb{N}$. La condition « $10^n + 1$ divisible par 9 » fournit un entier naturel K tel que $10^n + 1 = 9K$. Maintenant, puisque

$$10^{n+1} + 1 = 10 \times 10^n + 1 = 10 \times (10^n + 1) - 10 + 1 = 10 \times (10^n + 1) - 9 = 10 \times 9K - 9 = 9(10K - 1),$$

on obtient comme conséquence de l'hypothèse initiale le fait que l'entier $10^{n+1}+1$ est divisible par 9. L'implication proposée est totalement exacte et pourtant, aucune des deux phrases encadrant cette implication ne sont vraies (puisque les nombres 2, 11, 101, 1001... ne sont à l'évidence pas divisibles par 9). D'ailleurs, en écrivant cette implication, nous ne nous sommes *jamais* demandé si la première phrase écrite était vraie. Ceci sera crucial pour comprendre le raisonnement par récurrence (voir section suivante sur les types de raisonnements).

Illustrons maintenant pourquoi « (Faux ⇒ Vrai) est vraie ».

$$2 = 3 \text{ et } 2 = 1 \Rightarrow 2+2 = 3+1 \Rightarrow 4 = 4.$$

L'affirmation de départ est fausse et on en déduit (tout à fait par hasard mais par un raisonnement tout à fait juste) une affirmation vraie. L'affirmation finale est vraie, mais **ce ne sont pas les implications écrites qui la démontrent**.

Une conséquence importante est que, si votre hypothèse de départ est fausse, bien que par la suite vous teniez des raisonnements entièrement justes, vous n'avez aucune idée en fin de raisonnement de la véracité ou de la fausseté des conclusions auxquelles vous êtes parvenu(e). Conclusion : pour qu'une preuve soit correcte, il faut à la fois que les hypothèses soient correctes ET que les implications qui en découlent soient correctes. C'est pourquoi TOUS les théorèmes sont vrais sous certaines hypothèses qu'il convient de bien connaître !

Attention : Une erreur très fréquente consiste à penser que $P \implies Q$ est la même chose que $Q \implies P$. "Il pleut" implique que "l'herbe est mouillée". Mais "l'herbe est mouillée" n'implique PAS qu'il a plu. Elle peut être mouillée pour d'autres raisons. On peut voir avec les tables de vérité où les deux implications diffèrent.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	V	F
F	F	V	V

On voit par exemple que si Q est vrai et P est faux, alors $P \implies Q$ est vrai tandis que $Q \implies P$ est faux.

1.1.5 Equivalence logique $\iff$

DÉFINITION 1. Deux propositions équivalentes P et Q sont deux propositions simultanément vraies et simultanément fausses.

En termes logiques, P et Q sont équivalentes si elles ont **les mêmes valeurs de vérité**.

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Vous devez lire en première ligne de ce tableau que si les propositions P et Q sont vraies, la proposition $P \Leftrightarrow Q$ est vraie, et en deuxième ligne, que si P est vraie et Q est fausse, $P \Leftrightarrow Q$ est fausse.
L'équivalence logique joue pour les propositions le même rôle que joue l'égalité pour les nombres. Les expressions $3+2$ et 5 ne sont pas identiques et pourtant on écrit $3+2=5$. De même, les propositions $(x^2 = 1)$ et $(x = 1 \text{ ou } x = -1)$ ne sont pas identiques et pourtant on écrit $(x^2 = 1) \Leftrightarrow (x = 1 \text{ ou } x = -1)$.

Remarque : Si $A \iff B$, alors $\overline{A} \iff \overline{B}$.

1.1.6 Démonstration avec les tables de vérité

A partir de ces 5 connecteurs et de leur table de vérité, il est possible de démontrer qu'une proposition est vraie ou fausse, une fois admis les prémisses. Il suffit de construire les propositions à démontrer et regarder leur colonne dans la table.

Théorème 1. Soit P une proposition. $\overline{\left(\overline{P}\right)} \Leftrightarrow P$.

Exemple : $P : x > 2$. Alors $\overline{P} : x \leq 2$. Et $\overline{\left(\overline{P}\right)} > 2$

Démonstration.

P	$\overline{P}$	$\overline{\left(\overline{P}\right)}$
V	F	V
F	V	F

Il est clair que $\overline{\left(\overline{P}\right)}$ et P ont les mêmes valeurs de vérité. ❏

Théorème 2. Soient P et Q deux propositions. $\overline{P \wedge Q} \Leftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q}$ et $\overline{P \vee Q} \Leftrightarrow \overline{P} \wedge \overline{Q}$.

(Le contraire de « et » est « ou » et le contraire de « ou » est « et »).

Exemple : $P : x > 2$, $Q : x > 3$. Alors $P \wedge Q : x > 3$, donc $\overline{P \wedge Q} : x \leq 3$. De même $\overline{P} \vee \overline{Q} : x \leq 2 \vee x \leq 3$, donc $\overline{P} \vee \overline{Q} : x \leq 3$

Egalement, $P \vee Q : x > 2$, donc $\overline{P \vee Q} : x \leq 2$. Et $\overline{P} \wedge \overline{Q} : x \leq 2 \wedge x \leq 3$, donc $\overline{P} \wedge \overline{Q} : x \leq 2$

Démonstration. On démontre ces équivalences à l'aide de tables de vérité.

P	Q	$P \wedge Q$	$\overline{P \wedge Q}$	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$\overline{P} \vee \overline{Q}$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

P	Q	$P \vee Q$	$\overline{P \vee Q}$	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$\overline{P} \wedge \overline{Q}$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V

Dans chaque table, on lit effectivement les mêmes valeurs de vérité dans les quatrième et septième colonnes. ❑

Théorème 3. Soient P et Q deux propositions. $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{P} \vee Q)$.

Exemple : P : "Il pleut", Q : "L'herbe est mouillée". Si $P \implies Q$, alors soit il ne pleut pas (auquel cas on ne peut rien dire sur l'herbe), soit il pleut, auquel cas l'herbe est mouillée. Donc $(P \implies Q) \implies (\overline{P} \vee Q)$. Il en va de même pour l'implication inverse.

Démonstration. $P \Rightarrow Q$ est fausse dans l'unique cas où P est vraie et Q est fausse ou encore quand $\overline{P}$ et Q sont toutes deux fausses. $P \Rightarrow Q$ a donc les mêmes valeurs de vérité que $\overline{P} \vee Q$. Rédigez la table pour vous en convaincre. ❑

Théorème 4. (Propositions équivalentes) Soient P et Q deux propositions.

$$\text{Alors, } (P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)).$$

Démonstration.

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V

❑

C'est un moment important. **Une équivalence signifie deux implications, l'une de « gauche à droite » et l'autre de « droite à gauche »**.

Quand vous écrivez $P \Leftrightarrow Q$, vous devez être convaincu que la proposition de gauche P entraîne la proposition de droite Q et aussi que la proposition de droite Q entraîne la proposition de gauche P.

Théorème 5. (Négation d'une implication) Soient P et Q deux propositions.

$$\overline{P \Rightarrow Q} \Leftrightarrow P \wedge \overline{Q}.$$

Exemple : $P : x > 2$, $Q : x > 3$. Alors $P \implies Q$ est faux, donc $\overline{P \implies Q}$. On peut trouver x tel que $x > 2$ et $x \leq 3$, donc $P \wedge \overline{Q}$.

Exemple : La négation de "S'il pleut je vais au cinéma" n'est donc pas "S'il pleut je ne vais pas au cinéma", c'est "Il pleut et je ne vais pas au cinéma".

Démonstration. On peut écrire les tables de vérité. On peut aussi remarquer qu'on a :

$$\overline{P \Rightarrow Q} \Leftrightarrow \overline{\overline{P} \vee Q} \Leftrightarrow \overline{\overline{P}} \wedge \overline{Q} \Leftrightarrow P \wedge \overline{Q}.$$

❑

DÉFINITION 2. (Contraposée d'une implication)
Soient P et Q deux propositions. L'implication $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ s'appelle la **contraposée** (ou l'implication contraposée) de l'implication $P \Rightarrow Q$.

Exemple : $P : x > 2$, $Q : x > 1$. Alors $P \implies Q$ est vrai, et pour le montrer, c'est équivalent de montrer que $x \leq 1$ implique $x \leq 2$.

La contraposée d'une implication est équivalente à celle-ci. Ceci fournira plus loin un type de raisonnement usuel : le raisonnement par contraposition.

Théorème 6. (Contraposée d'une implication) Soient P et Q deux propositions.

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}).$$

Démonstration. La table de vérité est :

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

❑

DÉFINITION 3. (Réciproque d'une implication)
Soient P et Q deux propositions. L'implication $Q \Rightarrow P$ s'appelle la **réciproque** (ou l'implication réciproque) de l'implication $P \Rightarrow Q$.

Attention, une erreur souvent commise consiste à penser que si $P \Rightarrow Q$, alors $Q \Rightarrow P$. Ceci est FAUX ! Exemple : $x > 3 \implies x > 2$. Or $x > 2$ n'implique PAS $x > 3$.
Regardons les tables de vérité pour s'en convaincre.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	V	F
F	F	V	V

Les deux colonnes ne sont pas identiques. ❏

La négation de $(P \Rightarrow Q)$ est $(P \wedge \overline{Q})$.
La contraposée de $(P \Rightarrow Q)$ est $(\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$.
La réciproque de $(P \Rightarrow Q)$ est $(Q \Rightarrow P)$.

Par exemple, (pour $n \geq 2$), l'implication (I) : (n premier et $n \neq 2$) $\Rightarrow$ (n impair) est vraie.

— La contraposée de l'implication (I) est : (n pair) $\Rightarrow$ ($n = 2$ ou n non premier) et est (obligatoirement) vraie.
— La réciproque de l'implication (I) est : (n impair) $\Rightarrow$ (n premier et $n \neq 2$) et est fausse (puisque 9 n'est pas premier).
— Enfin, la négation de l'implication (I) dit qu'on peut trouver n tel que (n premier et $n \neq 2$ et n est pair). Cette négation est (obligatoirement) fausse.

1.1.7 C.N.S., ssi, il faut et il suffit

Les expressions « Condition nécessaire et suffisante (CNS) », « si et seulement si (ssi) », « il faut et il suffit » signifient toutes « logiquement équivalent » ou encore « $\Leftrightarrow$ ». Mais plus précisément, dans chacune de ces expressions, quel morceau correspond à « $\Rightarrow$ » et quel autre morceau correspond à « $\Leftarrow$ » ? La réponse est fournie par le tableau suivant :

$\Rightarrow$	$\Leftarrow$
condition nécessaire	condition suffisante
il faut	il suffit
seulement si	si

Exemple 1 : considérons $P : x > 2$ et $Q : x > 3$. Alors pour que Q soit vrai, il est *nécessaire* que P soit vrai. Pour que P soit vrai, il *suffit* que Q soit vrai (mais ce n'est pas nécessaire). On peut aussi dire "$x > 3$ seulement si $x > 2$" et "$x > 2$ si $x > 3$".

Exemple 2 : considérons par exemple l'implication vraie : ($n \geqslant 3$ et n premier) $\Rightarrow n$ impair. Si on cherche à l'énoncer dans le langage courant, on dira : pour que n soit un nombre premier supérieur ou égal à 3, il est nécessaire, il est obligatoire, il faut que n soit impair, mais on peut dire aussi que n peut être un nombre premier supérieur ou égal à 3 seulement si n est impair.
Mais si l'on considère l'implication contraire (qui est fausse) à savoir : n impair $\Rightarrow$ ($n \geqslant 3$ et n premier), on dira que pour que n soit un nombre premier supérieur ou égal à 3, il n'est pas suffisant, il ne suffit pas que n soit impair ou encore, si n est impair, n n'est pas nécessairement un nombre premier supérieur ou égal à 3.

Considérons encore l'implication vraie : $(x+1)^2 = 9 \Leftarrow x+1 = 3$. Pour que $(x+1)^2$ soit égal à 9, il suffit, il est suffisant que $x+1$ soit égal à 3, ou encore $(x+1)^2$ vaut 9 si $x+1$ vaut 3. Mais, pour que $(x+1)^2$ soit égal à 9, il n'est pas nécessaire, il n'est pas obligatoire que $x+1$ soit égal 3 (car $x+1$ peut aussi être égal à -3) ou encore l'égalité $(x+1)^2 = 9$ ne se produit pas seulement si $x+1$ vaut 3 (l'implication $(x+1)^2 = 9 \Rightarrow x+1 = 3$ est fausse).

1.1.8 Exercices

1- Soient P, Q et R trois propositions. Démontrer les équivalences logiques suivantes

• $(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$
• $(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$.
• $(P \wedge Q) \vee R \Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$
• $(P \vee Q) \wedge R \Leftrightarrow (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$.
• $((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$.

2- Démontrer que $(1 = 2) \implies (2 = 3)$.

3- Donner la définition du "ou" exclusif.

4- Écrire la négation des assertions suivantes où P, Q, R, S sont des propositions.

• $P \Rightarrow Q$
• P et non Q

• P et (Q et R)
• P ou (Q et R)
• (P et Q) $\Rightarrow$ ($R \Rightarrow S$).

5- La proposition $\big(P \wedge Q \Rightarrow (\neg P) \vee Q\big)$ est-elle vraie ?

6- On suppose que la proposition P est vraie ainsi que les propositions suivantes :

1. $(\neg Q) \wedge P \Rightarrow \neg S$.
2. $S \Rightarrow (\neg P) \vee Q$.
3. $P \Rightarrow R \vee S$.
4. $S \wedge Q \Rightarrow \neg P$.
5. $R \wedge \neg(S \vee Q) \Rightarrow T$.
6. $R \Rightarrow (\neg P) \vee (\neg Q)$.

La proposition T est-elle vraie ?

7- Donner la négation des phrases suivantes :

• S'il fait beau j'irai à la plage
• Tous les habitants de la rue du Havre qui ont les yeux bleus gagneront au loto et prendront leur retraite avant 50 ans.
• tout triangle rectangle possède un angle droit
• dans toutes les écuries, tous les chevaux sont noirs

8- Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

• Si $x^2 > 1$ alors $x > 1$
• Si $x < -1$ alors $x^2 > 1$
• $x^2 > 1$ si $x < -1$
• $x > 1$ si et seulement si $x^2 > 1$

1.2 Les quantificateurs

An economist, a physicist and a mathematician are in a train in Scotland when they see a black sheep in a field.
- Economist : "Oh ! Sheeps in Scotland are black !"
- Physicist : "Well, at least some sheeps are black"
- Mathematician : "No, there exists a field in which there is a sheep, of which at least one side is black !"

1.2.1 Définition

On a vu qu'il est possible de dire d'une proposition P si elle est vraie ou fausse. En revanche, lorsqu'une proposition dépend d'une ou plusieurs variables ($P(x)$, $P(x,y)$, ...), dire qu'elle est vraie ou fausse n'a pas de sens, puisque ça dépend de la valeur des variables. Par exemple, P : "$2 > 3$" est fausse, tandis que Q : "$3 > 2$" est vraie. En revanche, $P(x)$: "$x^2 > 1$" est vraie si $x \in \mathbb{R} \setminus]-1,1[$, fausse sinon. Il faut donc être précis dans les énoncés.

Le quantificateur $\forall$: "pour tout"

La proposition : « Pour tous les éléments x de E, la proposition $P(x)$ est vraie » s'écrit :

$$\text{« } \forall x \in E,\ P(x) \text{ ».}$$

Par exemple :
- $\forall x \in [1,+\infty[\quad (x^2 \geq 1)$ est une assertion vraie.
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad (x^2 \geq 1)$ est une assertion fausse.
- $\forall n \in \mathbb{N} \quad n(n+1)$ est divisible par 2 est vraie.

Le quantificateur $\exists$: "il existe"

La proposition : « il existe au moins un élément x de E tel que la proposition $P(x)$ est vraie » s'écrit :

$$\text{« } \exists x \in E / P(x) \text{ » ou aussi « } \exists x \in E,\ P(x) \text{ ».}$$

Par exemple :
- $\exists x \in \mathbb{R} \quad (x(x-1) < 0)$ est vraie (par exemple $x = \frac{1}{2}$ vérifie bien la propriété).
- $\exists n \in \mathbb{N} \quad n^2 - n > n$ est vraie (il y a plein de choix, par exemple $n = 3$ convient, mais aussi $n = 10$ ou même $n = 100$, un seul suffit pour dire que l'assertion est vraie).
- $\exists x \in \mathbb{R} \quad (x^2 = -1)$ est fausse (aucun réel au carré ne donnera un nombre négatif).

Le quantificateur $\exists!$: "il existe un unique"

La proposition : « il existe un et un seul élément x de E tel que la proposition $P(x)$ est vraie » s'écrit :

$$\text{« } \exists! x \in E,\ P(x) \text{ ».}$$

Par exemple :
- $\exists! x \in \mathbb{R} \quad (x(x-1) < 0)$ est fausse (on peut en trouver deux).

— $\exists! n \in \mathbb{N} \quad 2^n = 4$ est vraie (le seul choix possible est $n = 2$).
— $\exists! x \in \mathbb{R} \quad (x^2 = -1)$ est fausse.

Exercice

Ecrire avec des quantificateurs les propositions suivantes :

1) f est la fonction nulle (où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).
2) Le dénominateur D de f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.
3) f est l'identité de $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire la fonction qui, à chaque réel, associe lui-même).
4) Le graphe de f coupe la droite d'équation $y = x$.
5) f est croissante sur $\mathbb{R}$ (où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).
6) L'équation $\sin x = x$ a une et une seule solution dans $\mathbb{R}$.
7) Pour tout point M du plan $\mathscr{P}$, M est sur le cercle $\mathscr{C}$ de centre Ω et de rayon R si et seulement si la distance de M à Ω vaut R.

Solution

1) $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$.
2) $\exists x \in \mathbb{R} / D(x) = 0$.
3) $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x$.
4) $\exists x \in \mathbb{R} / f(x) = x$.
5) $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ (a \leqslant b \Rightarrow f(a) \leqslant f(b))$.
6) $\exists! x \in \mathbb{R} / \sin(x) = x$.
7) $\forall M \in \mathscr{P},\ (M \in \mathscr{C} \Leftrightarrow \Omega M = R)$.

COMMENTAIRE **2** *En 5), il ne faut pas lire que pour tout couple (a,b) de réels, on a $a \leqslant b$ ou encore, il ne faut pas lire $(\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ a \leqslant b) \Rightarrow f(a) \leqslant f(b)$. Mais, il faut lire que pour tout couple (a,b) de réels,* ***l'implication*** *$(a \leqslant b \Rightarrow f(a) \leqslant f(b))$ est vraie.*
De la même façon, en 7), il ne faut pas lire que tout point du plan est sur le cercle (ou encore il ne faut pas lire $(\forall M \in \mathscr{P},\ M \in \mathscr{C}) \Leftrightarrow \ldots$) mais il faut lire que pour tout point du plan, il est équivalent de dire que M est sur le cercle et que $\Omega M = R$. Dans cette phrase, le point M a la possibilité de ne pas être sur le cercle.

1.2.2 Propriétés des quantificateurs

La négation des quantificateurs : « Le contraire de $\forall$ est $\exists$ et le contraire de $\exists$ est $\forall$ ».

$$\boxed{\text{La négation de } \forall x \in E, \quad P(x) \quad \text{est} \quad \exists x \in E \quad \textit{non } P(x).}$$

Par exemple la négation de $\forall x \in [1, +\infty[\quad (x^2 \geq 1)$ est l'assertion $\exists x \in [1, +\infty[\quad (x^2 < 1)$. En effet la négation de $x^2 \geq 1$ est non$(x^2 \geq 1)$ mais s'écrit plus simplement $x^2 < 1$.

$$\boxed{\text{La négation de } \exists x \in E \quad P(x) \quad \text{est} \quad \forall x \in E \quad \textit{non } P(x).}$$

Voici des exemples :

— La négation de $\exists z \in \mathbb{C} \quad (z^2 + z + 1 = 0)$ est $\forall z \in \mathbb{C} \quad (z^2 + z + 1 \neq 0)$.

— La négation de $\forall x \in \mathbb{R} \quad (x + 1 \in \mathbb{Z})$ est $\exists x \in \mathbb{R} \quad (x + 1 \notin \mathbb{Z})$.

— Ce n'est pas plus difficile d'écrire la négation de phrases complexes. Pour l'assertion :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y > 0 \quad (x + y > 10)$$

sa négation est

$$\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y > 0 \quad (x + y \leq 10).$$

Exercice

Ecrire avec des quantificateurs les propositions suivantes :

1) f n'est pas nulle (où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).

2) Le dénominateur D de la fraction ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

3) f n'est pas l'identité de $\mathbb{R}$ (où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).

4) f n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$ (où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).

Solution

1) $\exists x \in \mathbb{R} / f(x) \neq 0$.

2) $\forall x \in \mathbb{R}$, $D(x) \neq 0$. Vous constaterez que les phrases « le dénominateur ne s'annule pas » et « le dénominateur n'est pas nul » n'ont pas du tout la même signification.

3) $\exists x \in \mathbb{R} / f(x) \neq x$.

4) $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 / (a \leqslant b \text{ et } f(a) > f(b))$. Ici, il a fallu nier l'implication $(a \leqslant b \Rightarrow f(a) \leqslant f(b))$.

Exemple : une fonction f est continue en un réel x_0 :

$$f \text{ est continue en } x_0 \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \forall x \in D_f, (|x - x_0| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon).$$

Si on veut écrire la définition de : « f n'est pas continue en x_0 », il faut écrire la négation de la phrase précédente. Il faut donc nier les quantificateurs, mais aussi nier les implications. Nous rappelons que la négation de $P \Rightarrow Q$ est $P \wedge \overline{Q}$ et que la négation de $\leqslant$ est $>$. D'autre part, la négation de $\forall \varepsilon > 0, \ldots$ est $\exists \varepsilon > 0 \ldots$ et non pas $\exists \varepsilon \leqslant 0 / \ldots$.

$$f \text{ n'est pas continue en } x_0 \Leftrightarrow (\exists \varepsilon > 0 / \forall \alpha > 0, \exists x \in D_f / (\underbrace{|x - x_0| \leqslant \alpha}_{P} \text{ et } \underbrace{|f(x) - f(x_0)| > \varepsilon}_{\overline{Q}}).$$

La distribution des quantificateurs

Passons maintenant aux rapports qu'entretiennent les quantificateurs $\forall$ et $\exists$ avec les connecteurs logiques *et* et *ou*.

Théorème : Soient E un ensemble et $P(x)$ et $Q(x)$ deux propositions.

❶ $(\forall x \in E,\ P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow ((\forall x \in E/\ P(x)) \wedge (\forall x \in E,\ Q(x)))$.

❷ $(\forall x \in E,\ P(x) \vee Q(x)) \underset{\Leftarrow}{\overset{\not\Rightarrow}{}} ((\forall x \in E/\ P(x)) \vee (\forall x \in E,\ Q(x)))$.

❸ $(\exists x \in E,\ P(x) \wedge Q(x)) \underset{\not\Leftarrow}{\overset{\Rightarrow}{}} ((\exists x \in E,\ P(x)) \wedge (\exists x \in E,\ Q(x)))$.

❹ $(\exists x \in E,\ P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow ((\exists x \in E,\ P(x)) \vee (\exists x \in E,\ Q(x)))$.

Dans ❷ et ❸, on ne trouve pas d'équivalence mais seulement une implication. Pour le comprendre, commençons par analyser le langage courant. La phrase « dans la classe, il existe une personne qui est un garçon et une autre personne qui est une fille » est vraie mais une même personne ne peut jouer les deux rôles à la fois ou encore la phrase « il existe un élève qui est un garçon et une fille » est fausse. De même, la phrase « dans la classe, tout élève est un garçon ou une fille » est vraie mais la phrase « dans la classe, tout élève est un garçon ou tout élève est une fille » est fausse.

Etudions un exemple « plus mathématique », et pour cela, considérons les deux propositions

$$(\exists x \in \mathbb{R}/\ \cos x = 0) \text{ et } (\exists x \in \mathbb{R}/\ \sin x = 0),$$

et

$$(\exists x \in \mathbb{R}/\ \cos x = 0 \text{ et } \sin x = 0).$$

La première proposition est vraie car 0 est un réel x tel que $\sin x = 0$ et $\frac{\pi}{2}$ est un réel x tel que $\cos x = 0$. Ainsi, dans les deux affirmations $(\exists x \in \mathbb{R}/\ \cos x = 0)$ et $(\exists x \in \mathbb{R}/\ \sin x = 0)$, la lettre x utilisée deux fois **ne désigne pas forcément un même nombre**. La deuxième proposition est clairement fausse (car par exemple $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \neq 0$).
Pour comprendre vraiment la phrase $(\exists x \in \mathbb{R}/\ \cos x = 0)$ et $(\exists x \in \mathbb{R}/\ \sin x = 0)$, il suffit d'être plus explicite : $(\exists x_1 \in \mathbb{R}/\ \cos x_1 = 0)$ et $(\exists x_2 \in \mathbb{R}/\ \sin x_2 = 0)$.

Etudions un autre exemple. On rappelle qu'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est monotone si et seulement si elle est croissante ou décroissante sur $\mathbb{R}$. Ceci s'écrit avec des quantificateurs :

$$(\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ (a \leqslant b \Rightarrow f(a) \leqslant f(b))) \text{ ou } (\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ (a \leqslant b \Rightarrow f(a) \geqslant f(b))),$$

et ne s'écrit sûrement pas

$$(\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ (a \leqslant b \Rightarrow f(a) \leqslant f(b) \text{ ou } f(a) \geqslant f(b)),$$

cette deuxième phrase étant, elle, vérifiée par toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On ne peut donc pas « distribuer $\forall$ sur le mot *ou* ».

Encore un exemple. On considère deux fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f \times g = 0$. Peut-on affirmer que l'on a $f = 0$ ou $g = 0$? La réponse est non. Il suffit de considérer deux fonctions non nulles f et g telles que, à chaque fois que f ne s'annule pas, ce soit g qui s'annule. Par exemple, $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{\begin{array}{l} x \text{ si } x \geqslant 0 \\ 0 \text{ si } x < 0. \end{array}\right. \end{array}$ et $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{\begin{array}{l} -x \text{ si } x \leqslant 0 \\ 0 \text{ si } x > 0. \end{array}\right. \end{array}$. Pour ces fonctions f et g, si x est un réel élément de $]-\infty, 0[$, $f(x)g(x) = 0 \times x = 0$ et si x est un réel élément de $[0, +\infty[$, $f(x)g(x) = x \times 0 = 0$.
Revenons à des fonctions quelconques f et g et exprimons ce qui précède avec des quantificateurs.

$$fg = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f(x)g(x) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ (f(x) = 0 \text{ ou } g(x) = 0)\ (I),$$

alors que

$$f = 0 \text{ ou } g = 0 \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0) \text{ ou } (\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 0)\ (II).$$

Les propositions (I) et (II) ne sont pas les mêmes et encore une fois, on ne peut donc pas distribuer $\forall$ sur le mot *ou*. Dans la phrase (I), « le mot *ou* est une fonction de x » et en faisant varier x, c'est tantôt $f(x)$ qui peut être nul et tantôt $g(x)$. Ce n'est pas le cas dans la phrase (II).

On peut distribuer $\forall$ sur « et » et $\exists$ sur « ou »
mais on ne peut pas distribuer $\forall$ sur « ou » et $\exists$ sur « et ».

Exercice

Ecrire avec des quantificateurs les propositions suivantes :

1) a) Tout entier naturel est pair ou impair.
b) Tout entier naturel est pair ou tout entier naturel est impair.
2) a) f est strictement monotone sur $\mathbb{R}$ (où f désigne une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).
b) f n'est pas strictement monotone sur $\mathbb{R}$.

Solution

1) a) $\forall n \in \mathbb{N}$, (n est pair ou n est impair).
b) ($\forall n \in \mathbb{N}$, n est pair) ou ($\forall n \in \mathbb{N}$, n est impair).

2) a) $(\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ (a < b \Rightarrow f(a) < f(b)))$ ou $(\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ (a < b \Rightarrow f(a) > f(b)))$.

b) $(\exists(a,b)\in\mathbb{R}^2/(a<b \text{ et } f(a)\geqslant f(b)))$ et $(\exists(a,b)\in\mathbb{R}^2/(a<b \text{ et } f(a)\leqslant f(b)))$.

La permutation des quantificateurs

L'ordre des quantificateurs est très important. Voici une phrase vraie : *"Pour toute personne, il existe un numéro de téléphone"*. Bien sûr le numéro dépend de la personne. Par contre cette phrase est fausse : *Il existe un numéro, pour toutes les personnes*. Ce serait le même numéro pour tout le monde !

Un autre exemple :

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad \exists y\in\mathbb{R} \quad (x+y>0) \quad \text{et} \quad \exists y\in\mathbb{R} \quad \forall x\in\mathbb{R} \quad (x+y>0).$$

sont différentes. La première est vraie, la seconde est fausse. En effet une phrase logique se lit de gauche à droite, ainsi la première phrase affirme *Pour tout réel x, il existe un réel y (qui peut donc dépendre de x) tel que* $x+y>0$. (par exemple on peut prendre $y=x+1$). C'est donc une phrase vraie. Par contre la deuxième se lit : *Il existe un réel y, tel que pour tout réel x,* $x+y>0$. Cette phrase est fausse, cela ne peut pas être le même y qui convient pour tous les x !

Théorème

❶ $((\forall x\in E), (\forall y\in E), P(x,y)) \Leftrightarrow ((\forall y\in E), (\forall x\in E), P(x,y))$.

❷ $((\exists x\in E), (\exists y\in E), P(x,y)) \Leftrightarrow ((\exists y\in E), (\exists x\in E), P(x,y))$.

On peut permuter des quantificateurs de même nature.

Théorème $((\exists x\in E)/(\forall y\in E, P(x,y))) \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} (\forall y\in E, \exists x\in E/P(x,y))$.

on ne peut pas permuter des quantificateurs de natures différentes.

Quand on écrit $\exists x/\ \forall y$ l'élément x est fourni une bonne fois pour toutes **avant** les y et est donc **constant** quand y varie. Quand on écrit $\forall y$, $\exists x$ l'élément x est fourni **après** chaque y. Il dépend de y et **peut donc varier** quand y varie.

Exercice

Ecrire avec des quantificateurs les propositions suivantes :

1) a) f est constante sur $\mathbb{R}$ (où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).

b) f n'est pas constante sur $\mathbb{R}$.

2) a) Pour chaque entier, on peut trouver un entier strictement plus grand (cette affirmation est vraie).

b) Il y a un entier plus grand que tous les entiers (cette affirmation est fausse).

Solution

1) a) $\exists C \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = C$, ou encore plus simplement, $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(0)$.
Attention, $\forall x \in \mathbb{R}, \exists C \in \mathbb{R} / f(x) = C$ veut dire tout à fait autre chose !

b) $\forall C \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R} / f(x) \neq C$, ou encore plus simplement, $\exists x \in \mathbb{R} / f(x) \neq f(0)$.

2) a) $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists m \in \mathbb{N} / m > n$.

b) $\exists m \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N},\ m > n$.

1.2.3 Exercices

1- Ecrire les phrases suivantes à l'aide de quantificateurs :

• Pour tout entier x, il existe un entier y tel que, pour tout entier z, la relation $z < x$ implique le relation $z < x + 1$

• La fonction f est croissante

• La fonction f est croissante et positive

• Il y a une valeur pour laquelle la fonction f prend une valeur négative

• f ne prend jamais deux fois la même valeur

• f atteint toutes les valeurs de $\mathbb{N}$

• la fonction f n'est pas inférieure à la fonction g

2- Donner la négation des énoncés suivants :

• $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \qquad (|x - 7/5| < \alpha \Rightarrow |5x - 7| < \epsilon)$.

• $(\forall x)(\exists n)/(x \leq n)$.

- $(\exists M)/(\forall n)(|u_n| \leq M)$.

- $(\forall x)(\forall y)(xy = yx)$.

- $(\forall x)(\exists y)/(yxy^{-1} = x)$.

- $(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})/(\forall n \geq N)(|u_n| < \epsilon)$.

- $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall \epsilon > 0)(\exists \alpha > 0)/(\forall f \in \mathscr{F})(\forall y \in \mathbb{R})(|x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon)$.

3- Soient les quatre assertions suivantes :

$$(a)\ \exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0 \quad ; \quad (b)\ \forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0\ ;$$

$$(c)\ \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0 \quad ; \quad (d)\ \exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad y^2 > x.$$

1. Les assertions a, b, c, d sont-elles vraies ou fausses ?
2. Donner leur négation.

4- Les phrases suivantes sont-elles équivalentes ?

1. « $\forall x \in \mathbb{R}, (f(x) = 0 \text{ et } g(x) = 0)$ » et « $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0) \text{ et } (\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 0)$ ».
2. « $\forall x \in \mathbb{R}, (f(x) = 0 \text{ ou } g(x) = 0)$ » et « $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0) \text{ ou } (\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 0)$ ».

1.3 Les grands types de raisonnement

Voici des méthodes classiques de raisonnements.

1.3.1 Raisonnement direct

On veut montrer que l'assertion $P \implies Q$ est vraie. On suppose que P est vraie et on montre qu'alors Q est vraie. C'est la méthode à laquelle vous êtes le plus habitué.
Attention : si la proposition $P \implies Q$ est vraie, cela ne veut PAS dire que Q est vraie ! Pour que Q soit vraie, il faut montrer que $P \implies Q$ est vraie, ET que P est vraie.

EXAMPLE **1** *Montrer que si $a, b \in \mathbb{Q}$ alors $a + b \in \mathbb{Q}$.*

PREUVE ***1*** *Prenons $a \in \mathbb{Q}$, $b \in \mathbb{Q}$. Rappelons que les rationnels $\mathbb{Q}$ sont l'ensemble des réels s'écrivant $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.*

Alors $a = \frac{p}{q}$ pour un certain $p \in \mathbb{Z}$ et un certain $q \in \mathbb{N}^*$. De même $b = \frac{p'}{q'}$ avec $p' \in \mathbb{Z}$ et $q' \in \mathbb{N}^*$. Maintenant

$$a + b = \frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{pq' + qp'}{qq'}.$$

Or le numérateur $pq' + qp'$ est bien un élément de $\mathbb{Z}$; le dénominateur qq' est lui un élément de $\mathbb{N}^*$. Donc $a+b$ s'écrit bien de la forme $a+b = \frac{p''}{q''}$ avec $p'' \in \mathbb{Z}$, $q'' \in \mathbb{N}^*$. Ainsi $a+b \in \mathbb{Q}$.

1.3.2 Cas par cas

Si l'on souhaite vérifier une assertion $P(x)$ pour tous les x dans un ensemble E, on montre l'assertion pour les x dans une partie A de E, puis pour les x n'appartenant pas à A. C'est la méthode de *disjonction* ou du *cas par cas*.

EXAMPLE **2** *Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x-1| \leq x^2 - x + 1$.*

PREUVE ***2*** *Soit $x \in \mathbb{R}$. Nous distinguons deux cas.*

Premier cas : *$x \geq 1$. Alors $|x-1| = x-1$. Calculons alors $x^2 - x + 1 - |x-1|$.*

$$\begin{aligned} x^2 - x + 1 - |x-1| &= x^2 - x + 1 - (x-1) \\ &= x^2 - 2x + 2 \\ &= (x-1)^2 + 1 \geq 0. \end{aligned}$$

Ainsi $x^2 - x + 1 - |x-1| \geq 0$ et donc $x^2 - x + 1 \geq |x-1|$.

Deuxième cas : *$x < 1$. Alors $|x-1| = -(x-1)$. Nous obtenons $x^2 - x + 1 - |x-1| = x^2 - x + 1 + (x-1) = x^2 \geq 0$. Et donc $x^2 - x + 1 \geq |x-1|$.*

Conclusion. *Dans tous les cas $|x-1| \leq x^2 - x + 1$.*

1.3.3 Contraposée

Le raisonnement par *contraposition* est basé sur l'équivalence suivante :

$$\boxed{\text{L'assertion } P \implies Q \text{ est équivalente à } \overline{Q} \implies \overline{P}.}$$

Donc si l'on souhaite montrer l'assertion $P \implies Q$, on peut (il est suffisant de) montrer que si $\overline{Q}$ est vraie alors $\overline{P}$ est vraie. Ceci peut se révéler très pratique car parfois l'implication $\overline{Q} \implies \overline{P}$ est plus simple.

EXAMPLE **3** *Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si n^2 est pair alors n est pair.*

PREUVE ***3*** *Montrer l'implication directe n'est pas facile. Nous supposons que n n'est pas pair. Nous voulons montrer qu'alors n^2 n'est pas pair. Comme n n'est pas pair, il est impair et donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$. Alors $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2\ell + 1$ avec $\ell = 2k^2 + 2k \in \mathbb{N}$. Et donc n^2 est impair.*

Conclusion : nous avons montré que si n est impair alors n^2 est impair. Par contraposition ceci est équivalent à : si n^2 est pair alors n est pair.

1.3.4 Absurde

Le *raisonnement par l'absurde* pour montrer $P \implies Q$ repose sur le principe suivant : on suppose à la fois que P est vraie et que Q est fausse et on cherche une contradiction. Ainsi si P est vraie alors Q doit être vraie et donc $P \implies Q$ est vraie.
En termes logiques, la proposition *"$P \implies Q$ est vrai"* est équivalente à *"$\overline{P \implies Q}$ est faux"*. Or "$\overline{P \implies Q}$" est équivalent à "$P \wedge \overline{Q}$".

L'assertion *"$P \implies Q$ est vrai"* est équivalente à *"$P \wedge \overline{Q}$ est faux"*.

EXAMPLE **4** *Soient $a, b \geq 0$. Montrer que si $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ alors $a = b$.*

PREUVE ***4*** *Nous raisonnons par l'absurde en supposant que $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ **et** $a \neq b$. Comme $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ alors $a(1+a) = b(1+b)$ donc $a + a^2 = b + b^2$ d'où $a^2 - b^2 = b - a$. Cela conduit à $(a-b)(a+b) = -(a-b)$. Comme $a \neq b$ alors $a - b \neq 0$ et donc en divisant par $a - b$ on obtient $a + b = -1$. La somme de deux nombres positifs ne peut être négative. Nous obtenons une contradiction. Conclusion : soit $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ est faux, soit c'est vrai et dans ce cas, forcément, $a = b$.*

Dans la pratique, on peut choisir indifféremment entre un raisonnement par contraposition ou par l'absurde. Attention cependant de bien écrire quel type de raisonnement vous choisissez et surtout de ne pas changer en cours de rédaction !

1.3.5 Contre-exemple

Si l'on veut montrer qu'une assertion du type $\forall x \in E \quad P(x)$ est vraie alors pour chaque x de E il faut montrer que $P(x)$ est vraie. Par contre pour montrer que cette assertion est fausse alors il suffit de trouver $x \in E$ tel que $P(x)$ soit fausse. (Rappelez-vous la négation de $\forall x \in E \quad P(x)$ est $\exists x \in E \quad \overline{P(x)}$). Trouver un tel x c'est trouver un *contre-exemple* à l'assertion $\forall x \in E \quad P(x)$.

EXAMPLE **5** *Montrer que l'assertion suivante est fausse "Tout entier positif est somme de trois carrés".*

(Les carrés sont les 0^2, 1^2, 2^2, 3^2,... Par exemple $6 = 2^2 + 1^2 + 1^2$.)

PREUVE ***5*** *Un contre-exemple est 7 : les carrés inférieurs à 7 sont 0, 1, 4 mais avec trois de ces nombres on ne peut faire 7.*

1.3.6 Récurrence

Le *principe de récurrence* permet de montrer qu'une assertion $P(n)$, dépendant de n, est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. La démonstration par récurrence se déroule en trois étapes : lors de l'**initialisation** on prouve $P(0)$. Pour l'étape d'**hérédité**, on suppose $n \geq 0$ donné avec $P(n)$ vraie, et on démontre alors que l'assertion $P(n+1)$ au rang suivant est vraie. Enfin dans la **conclusion**, on rappelle que par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On montre donc "$P(0)$ vrai" et "$\forall n, P(n) \implies P(n+1)$ vrai".
Dans ce cas, $P(0) \implies P(1) \implies P(2) \implies \ldots \implies P(n) \implies \ldots$

EXAMPLE **6** *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n > n$.*

PREUVE ***6*** *Pour $n \geq 0$, notons $P(n)$ l'assertion suivante :*

$$2^n > n.$$

Nous allons démontrer par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$.

Initialisation. *Pour $n = 0$ nous avons $2^0 = 1 > 0$. Donc $P(0)$ est vraie.*

Hérédité. *Fixons $n \geq 0$. Supposons que $P(n)$ soit vraie. Nous allons montrer que $P(n+1)$ est vraie.*

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &= 2^n + 2^n \\ &> n + 2^n \quad \textit{car par } P(n) \textit{ nous savons } 2^n > n, \\ &> n + 1 \quad \textit{car } 2^n \geq 1. \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. *Par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$, c'est-à-dire $2^n > n$ pour tout $n \geq 0$.*

Remarque : Si on doit démontrer qu'une propriété est vraie pour tout $n \geq n_0$, alors on commence l'initialisation au rang n_0.

Exercices

1. (Raisonnement direct) Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$. Montrer que si $a \leq b$ alors $a \leq \frac{a+b}{2} \leq b$ et $a \leq \sqrt{ab} \leq b$.
2. (Cas par cas) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)$ est divisible par 2 (distinguer les n pairs des n impairs).

3. (Contraposée ou absurde) Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. Montrer que si $b \neq 0$ alors $a + b\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. (On utilisera que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.)
4. (Absurde) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\sqrt{n^2+1}$ n'est pas un entier.
5. (Contre-exemple) Est-ce que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x < 2 \implies x^2 < 4$?
6. (Récurrence) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
7. (Récurrence) Fixons un réel $x \geq 0$. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $(1+x)^n \geq 1+nx$.