De la manipulation des élections indirectes *

Sebastian Bervoets[†] and Vincent Merlin[‡]

November 6, 2006

Ce papier est consacré à l'analyse des procédures de vote indirectes. D'abord des élections locales ont lieu dans chaque juridiction, puis les vainqueurs locaux sont agrégés par une autre procédure de vote qui permet de désigner le vainqueur final. Si les individus peuvent changer de juridiction au moment du vote, il est possible qu'ils manipulent le résultat de l'élection sauf si la règle de vote est la règle de Priorité, qui assigne un ordre de priorité à chacun des candidats en lice.

ON THE MANIPULATION OF INDIRECT ELECTIONS

This paper is devoted to the analysis of two tiers voting rules. First, one candidate is elected in every jurisdiction and next, an aggregation procedure collects the results from the jurisdictions in order to designate the final winner. It appears that whenever individuals are allowed to change jurisdiction when casting their ballot, it is possible that they can manipulate the result of the election, except when the voting rule is the Priority rule, which assigns a priority order to the candidates.

Classification JEL : D71, D72

INTRODUCTION

Le 11 septembre 2006, s'est ouvert au tribunal correctionnel de Paris le procès dit des faux électeurs. En effet, lors des élections municipales de 1989, Jacques Dominati fut élu maire du troisième arrondissement au premier tour avec seulement 20 voix d'avance. Il s'avère que 327 électeurs parisiens avaient été débauchés de leurs arrondissements

*Nous tenons à remercier Nicolas Gravel, Maurice Salles ainsi que les participants aux LV congrès annuel de l'AFSE pour leurs commentaires avisés. Le travail de S. Bervoets est supporté financièrement par le Ministère Espagnol de l'Education et des Sciences à travers les projets SEJ2005-01481/ECON, PTA-2003-02-00005 et FEDER, ainsi que par la Generalitat de Catalunya à travers le projet 2005SGR00454.

†Departament d'Economia i d'Història Econòmica, CODE - Edifici B - Universitat Autònoma de Barcelona - 08193 Bellaterra, Cerdanyola del Vallès Barcelona, Spain. Tel: +34 93 581 40 68. Email: Sebastian.Bervoets@uab.es

‡CREM, CNRS and Université de Caen. Address: MRSH, bureau 230, Univesité de Caen, 14032 Caen cedex, France. Tel: +33 (0) 231 56 62 49. Fax: +33 (0) 231 56 55 13. Email:vincent.merlin@unicaen.fr

de résidence pour s'incrire sur les listes du troisième arrondissement. En "déplaçant" artificiellement des électeurs d'une juridiction vers une autre, Jacques Dominati a ainsi réussi à manipuler avec succès une règle de vote.

Cet exemple illustre une faille des procédures de vote indirectes, qui supposent que la décision collective est prise par une assemblée de représentants élus dans différentes juridictions. Ainsi, deux répartitions différentes des mêmes électeurs entre les circonscriptions électorales peuvent donner deux résultats différents. Un autre exemple est celui des élections américaines en 2000 : George W. Bush fût élu avec une avance de seulement 537 voix dans l'état clef de Floride, alors qu'il avait recueilli moins de suffrages que son adversaire au niveau national. Il aurait suffi que 538 électeurs démocrates décident de s'inscrire sur les listes de Floride pour qu'Al Gore remporte cet état, et devienne président des Etats-Unis. Il est certes peu probable que les électeurs se déplacent d'eux-mêmes d'une juridiction vers une autre pour peser sur le résultat final[1], mais il est courant que les hommes politiques manipulent les élections en modifiant les frontières des circonscriptions électorales. La classe politique américaine est ainsi passé maître dans l'art du découpage électoral, puisque sur 435 circonscriptions législatives, seule une trentaine est jugée compétitive. Nous renvoyons le lecteur au livre récent de Michel Balisnki [2004] et au site nationalatlas.org pour découvrir les formes étranges des circonscriptions américaines (entre autres, Arizona 2, Georgie 13, etc...).

Les avantages du vote indirect sont cependant connus : l'élu est plus proche de ses électeurs, et contrairement aux élections à la proportionnelle, il ne doit pas son statut à sa capacité à négocier une bonne place dans une liste. Une question légitime concerne alors l'existence de modes de scrutin indirects qui garderaient ces avantages sans pour autant être manipulables par le jeu des découpages. L'approche axiomatique de le théorie du choix social semble être le cadre désigné pour tenter d'y répondre et cet article va l'utiliser pour illustrer la difficulté de concilier le principe du vote indirect avec le principe de non manipulation.

Après l'ouvrage pionnier d'Arrow [1963], May [1952] a obtenu un premier résultat positif consistant en la caractérisation axiomatique de la règle de la majorité entre deux options. C'est la seule méthode qui soit à la fois neutre (aucune option n'est privilégiée), anonyme (aucun votant n'est privilégié) et monotone (une voix supplémentaire pour un candidat au dépend de l'autre lui permet de briser en sa faveur une égalité). En abandonnant l'hypothèse d'anonymat, Murakami [1966], Fine [1972] et Fishburn [1973] ont décrit avec précision les règles neutres et monotones comme un emboitement de décisions prises à la majoritaire. On doit les premiers résultats sur la non manipulabilité du vote indirect aux travaux de Laffond et Lainé [1999,2000], Chambers [2003], Bervoets et Merlin [2006][2] et Perote Peña [2005]. En particulier, ces trois dernières contributions s'attachent à cerner avec des hypothèses différentes le conflit qui existe entre vote indirect et non manipulabilité. En reprenant le cadre d'analyse de Bervoets et Merlin [2006], nous allons présenter un résultat nouveau dans cette littérature : une règle de vote indirecte qui est stable face aux déplacements des électeurs, et qui vérifie le principe selon lequel ne peuvent être élus que des candidats ayant reçu au moins une voix, doit traiter les candidats selon un ordre de priorité particulier. Autrement

[1]Cependant, les dernières élections anglaises et américaines ont vu fleurir des sites internet proposant aux électeurs d'une juridiction d'échanger leurs votes avec des électeurs d'autres juridictions à des fins de manipulation. Voir à ce sujet l'article récent de Hartvigsen [2006].

[2]Une partie des résultats de Bervoets et Merlin est consignée dans la thèse de Sebastian Bervoets [2005].

dit, la non manipulation n'est obtenue qu'en abandonnant d'une manière radicale le traitement égal entre les candidats.

Après avoir présenté les notations et définitions du modèle, le coeur de l'article sera consacré à l'exposé de deux conditions normatives, la stabilité et la représentativité minimale, et à la caractérisation des règles de Priorité. Les preuves sont regroupées en annexe tandis que la section finale ouvre la discussion sur de possibles prolongements.

NOTATIONS ET DEFINITIONS

L'ensemble fini des candidats est désigné par $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$, l'ensemble fini des électeurs est donné par $N = \{1, \ldots, i, \ldots, n\}$, avec $n \geq 3$, et $J = \{J_j; j \in M\}$ est l'ensemble fini des juridictions avec $M = \{1, \ldots, m\}$, $m \geq 2$. On supposera que $n > m$.

On appelle σ une fonction de partition de N dans $\{1, 2, \ldots, m\}$. Formellement, $\forall i \in N$, $\sigma(i) = j \Leftrightarrow i \in J_j$, avec $J_1 \cup J_2 \cup \ldots \cup J_m = N$ et $J_j \cap J_k = \emptyset$. Dans ce qui suit, on considèrera des fonctions de partition dans Σ, défini comme l'ensemble de toutes les partitions telles que $\forall\, j \in M$, $\sigma^{-1}(j) \neq \emptyset$, i.e. telles qu'aucune juridiction n'est vide. Puisque $n > m$, il y a au moins une juridiction qui contient deux électeurs.

Les électeurs sont équippés d'une relation d'ordre linéaire R_i sur A, c'est-à-dire d'une relation binaire qui est transitive, complète et antisymétrique. Ils votent pour un candidat unique de A dans la juridiction dans laquelle ils résident et sont libres de choisir leur candidat favori ou non. En revanche, pour l'étude qui suit, on suppose que lorsqu'ils changent de juridiction, les électeurs votent pour le même candidat. En effet, l'objectif de cet article n'est pas d'étudier la manipulation au sens de Gibbard [1973] et Satterthwaite [1975] (pour laquelle les électeurs changent de vote) mais bien les manipulations par mouvement des électeurs.

L'expression $\pi \in A^n$ désigne un *profil de vote*, qui est un vecteur de dimension n dont la i^{eme} coordonnée indique le vote de l'individu i, que l'on notera $\pi|_i$. De même, pour tout sous-ensemble S de N, $\pi|_S$ désigne la restriction de π à S.

Lors d'une élection, la j^{eme} juridiction J_j élit un vainqueur juridictionel à travers la fonction de choix social f_j:

$$\begin{array}{rcl} f_j : \cup_{t=1}^{n-m+1} A^t & \rightarrow & A \\ \pi & \rightarrow & z \in A \end{array}$$

On notera que f_j est définie pour des tailles de population quelconques mais réalisables (comprises entre 1 au minimum et $n - m + 1$ au maximum). On impose la condition suivante sur les fonctions $\{f_j\}_{j=1,m}$:

Définition 1 Souveraineté Juridictionelle

$$Si\ [\pi|_{J_j} = \pi'|_{J_j}]\ et\ [\sigma(i) = j \Leftrightarrow \sigma'(i) = j]\ alors\ f_j(\pi|_{J_j}) = f_j(\pi'|_{J_j})\ \forall j$$

Le résultat d'une élection dans la région J_j est ainsi indépendant de ce qui se passe dans les juridictions voisines. L'ensemble des fonctions de choix social satisfaisant la Souveraineté Juridictionelle est noté $\mathcal{F}$.

Les m vainqueurs juridictionels génèrent un profil de vote $\Pi \in A^m$, que l'on appele un *profil fédéral*. La fédération élit ensuite son vainqueur final à l'aide de la fonction de choix social g définie comme suit :

$$\begin{array}{rrcl} g: & A^m & \to & A \\ & \Pi=(z_1,\dots,z_m) & \to & z \in A \end{array}$$

Une *constitution fédérale* est donnée par le $(m+1)$-uplet $C=(g,f_1,\dots,f_m)$, avec $f_j \in \mathcal{F}$,$\forall j$. Pour une constitution donnée, le vainqueur fédéral sera désigné par :

$$g(f_1(\pi|_{J_1}),\dots,f_m(\pi|_{J_m})) = g(f(\sigma,\pi))$$

Remarque 1 *Bien que les fonctions f_j et g sont des fonctions de choix social, leur combinaison dans une procédure en deux étapes ne génère pas une fonction de choix social. En effet, une fonction de choix social a pour seul argument les choix des électeurs tandis que la recherche du vainqueur pour une constitution fédérale requiert de connaître la partition des électeurs en plus de leurs choix.*

L'exemple suivant illustre la sensibilité des règles de vote des constitutions fédérales au découpage électoral. Posons $A=\{a,b\}$, et $N=\{1,2,3,4,5\}$ et $J=\{J_1,J_2,J_3\}$. Supposons de plus que la règle de la majorité soit appliquée pour f_1, f_2, f_3 et g, et désigne toujours a comme vainqueur en cas d'égalité. Considérons le profile de vote $\pi=(a,a,a,b,b)$ où les individus 1 à 3 votent pour a tandis que les individus 4 et 5 votent pour b. La partition σ est telle que $\sigma(1)=\sigma(2)=\sigma(3)=1$, $\sigma(4)=2$ et $\sigma(5)=3$. Ainsi, le vainqueur en J_1 est a, tandis que le vainqueur en J_2 et en J_3 est b, donc $\Pi=(a,b,b)$. Ainsi, $g(f(\sigma,\pi))=g(\Pi)=b$. Considérons maintenant σ' telle que $\sigma'(1)=1$, $\sigma'(2)=\sigma'(3)=\sigma'(4)=2$ et $\sigma'(5)=3$. Dans ce cas, le vainqueur en J_1 et en J_2 est a, tandis que le vainqueur en J_3 est b. Ainsi, $\Pi'=(a,a,b)$, et $g(f(\sigma',\pi))=a$.

PROPRIETES ET RESULTATS

On définit ici quelques propriétés que l'on peut souhaiter imposer sur les différentes fonctions de choix social.

Axiome 1 Représentativité Minimale (RM)
Pour tout π, σ et $j\in M$, $\exists i \in J_j$ tel que $f_j(\pi|_{J_j})=\pi|_i$ et $\exists k\in M$ tel que $g(\Pi)=\Pi|_k$

Autrement dit, pour chacune des règles de vote, il est impossible que le vainqueur n'ait reçu aucune voix. L'axiome RM implique l'axiome d'unanimité à la fois sur les fonctions f_j et sur g (l'axiome d'unanimité impose qu'un candidat recevant l'unanimité des voix soit élu).

Définition 2 Manipulabilité Individuelle

$$\exists\, \pi\in A^n, \exists\, i\in N, \exists\, \sigma,\sigma'\in\Sigma \textit{ tels que } \sigma(h)=\sigma'(h)\ \forall h\neq i \textit{ et } \sigma(i)\neq\sigma'(i):$$

$$g(f(\sigma',\pi))\ R_i\ g(f(\sigma,\pi)).$$

La Manipulabilité Individuelle dit qu'il existe une situation électorale telle qu'un électeur isolé, en choisissant une juridiction plutôt qu'une autre, peut changer, en sa faveur et à lui seul, le résultat de l'élection. Cette propriété est évidemment extrêmement indésirable puisqu'elle permet de concentrer beaucoup de pouvoir entre les mains d'un électeur. On demandera donc par la suite à ce qu'une constitution fédérale soit non individuellement manipulable.

Axiome 2 Stabilité

$$\forall \pi \in A^n,\ g(f(\sigma,\pi)) = g(f(\sigma',\pi))\ \ \forall \sigma,\, \sigma' \in \Sigma.$$

L'axiome de Stabilité traduit une idée très forte de la non manipulabilité. En effet, celui-ci requiert non seulement qu'un individu isolé ne puisse pas changer le résultat de l'élection, il requiert également que ce soit vrai pour toute coalition d'électeurs qui souhaiterait se déplacer. Enfin, la stabilité est une condition toujours plus forte puisqu'elle ne considère pas seulement des changements de vainqueurs qui seraient bénéficiaires aux électeurs de la coalition, mais tout changement quel qu'il soit. Par définition, cet axiome implique que le résultat de l'élection devrait être indépendant de la partition des individus. Ainsi la condition de Stabilité fait coïncider la composée de deux fonctions de choix social avec une fonction de choix social (cf. Rq. 1).

Théorème 1 *Pour tout ensemble de candidats A, une constitution C est instable si et seulement si elle est individuellement manipulable*[3].

Il peut sembler indésirable qu'une coalition d'électeurs qui ne changent pas leur vote, mais changent de juridiction, puisse inverser le résultat d'une élection. Cependant, si cette idée peut être accéptée dans certaines circonstances, il paraît en revanche plus difficile d'accepter l'idée que le résultat de cette élection ne dépende que de la localisation d'un seul individu. Le théorème 1 dit que ces deux implications sont en fait équivalentes. Pour cette raison, nous nous attarderons uniquement sur la condition de stabilité qui est plus simple à manier.

Soit $X(\pi) = \{z \in X \text{ tels que } z \in \pi\}$, l'ensemble des options présentes dans le profil π.

Définition 3 *On dit que a domine b, que l'on notera $a \succ b$, si $g(f(\sigma,\pi)) = a$ pour tout profil de vote π tel que $X(\pi) = \{a,b\}$.*

Lorsque a domine b, b ne peut jamais remporter l'élection dès que a reçoit au moins une voix.

Proposition 1 *C satisfait Stabilité et Représentativité Minimale si et seulement si pour toute paire d'options $\{a,b\}$, $a \succ b$ ou $b \succ a$.*

Proposition 2 *Si C satisfait Stabilité et RM, alors $\succ$ est transitive, i.e. si $a \succ b$ et $b \succ c$, alors $a \succ c$.*

D'après les propositions 1 et 2 (voir les preuves en annexe), la relation $\succ$ est transitive et complète. Elle est par ailleurs antisymétrique. Par conséquent $\succ$ est un ordre linéaire, nous permettant de classer les différentes options par ordre de priorité, dès lors qu'une constitution fédérale satisfait à la fois Stabilité et RM. Ainsi par la suite nous supposerons que $a_1 \succ a_2 \succ \ldots \succ a_{p-1} \succ a_p$.

Définition 4 *Pour tout $A \in 2^{X\setminus\{\emptyset\}}$, $Max_{\succ}A = \{a \in A; a \succ a'\ \ \forall a' \in A, a' \neq a\}$*

[3] Voir la preuve de ce théorème dans Bervoets [2005] et Bervoets et Merlin [2006]

$Max_{\succ}A$ est l'option de A qui possède la plus haute priorité d'après la relation $\succ$.

Définition 5 *Une constitution fédérale C est une règle de Priorité si et seulement si il existe un ordre linéaire $\succ$ sur X et*

- $\forall j \in M,\ f_j(\pi|_{J_j}) = Max_{\succ}X(\pi|_{J_j})$
- $g(\Pi) = Max_{\succ}X(\Pi)$

Une règle de Priorité est donc une règle qui détermine le vainqueur de l'élection uniquement en sélectionnant, parmi tous les candidats ayant reçu au moins une voix, celui qui a la plus haute priorité.

Théorème 2 *C est une Constitution satisfaisant Stabilité et Représentativité Minimale si et seulement si c'est une règle de Priorité, i.e. il existe une ordre $\succ$ sur X tel que $g(f(\sigma,\pi)) = Max_{\succ}X(\pi)$.*

Comme nous l'indique ce théorème (voir la preuve en annexe), dès lors que l'on souhaite associer des procédures de vote indirectes revêtant des caractéristiques démocratiques minimales à des propriétés de non manipulation, on se trouve confronté à une impossibilité. En effet, pour assurer la non manipulabilité des règles de vote, il est nécessaire de renoncer soit à la représentativité minimale, soit à la neutralité par rapport aux candidats.

CONCLUSION

Dans cet article, nous avons montré qu'interdire les manipulations par mouvement des électeurs conduisait à une impase. Les seules règles stables et représentatives sont les règles de Priorité, qui violent un certain nombre de principes démocratiques. Chambers [2003] a également proposé une caractérisation des règles de Priorité, avec cependant des hypothèses plus fortes que les notres. D'abord, il suppose que les règles f_j sont toutes identiques à g. Ensuite, il impose l'anonymat sur ces fonctions. Enfin, ses preuves utilisent abondemment le fait que le nombre de votants comme le nombre de circonscriptions sont variables, tandis qu'ils sont fixes ici.

Nos analyses présentent cependant deux limites. Premièrement, l'expression des préférences se limite au vote pour une seule option. Que se passe-t-il lorsque les individus peuvent inscrire sur leur bulletin de vote l'ensemble de leurs préférences ? Perote-Peña [2006] montre alors que le conflit entre anonymat et neutralité persiste dans un cadre un peu différent. Deuxièmement, nous n'imposons aucune contrainte sur les tailles des différentes juridictions. L'intérêt des travaux de Laffond et Lainé [1999,2000] est justement de contraindre la taille des juridictions en supposant que deux circonscriptions ont au plus deux votants d'écart. Leur résultat d'impossibilité s'applique alors aux régles de type Condorcet et aux classements par points. Là aussi, la difficulté de concilier non manipulation et vote indirect s'impose.

Une solution serait alors d'affaiblir les conditions de Representativité Minimale et de Stabilité. L'affaiblissement de l'axiome RM est abondemment discuté dans Bervoets et Merlin [2006]. Ne considérer le principe d'unanimité que sur les règles f_j, ou même ne l'appliquer que lorsqu'une juridiction ne comporte qu'un candidat, permet certes de décrire de nouvelles règles stables, mais aucune n'est satisfaisante. Reste alors la question de l'affaiblissement de la stabilité, qui est une condition forte dans la mesure où elle suppose que pour tout profil de vote, toute répartition des votants doit être un équilibre de Nash dans un jeu pour lequel les stratégies consistent en un choix de juridiction où voter. On pourrait se contenter de chercher le nombre de profils et de partitions qui sont stables pour des constitutions données, de manière à les classer selon leur degré décroissant de stabilité; c'est l'approche par la probabilité des paradoxes des vote (pour une présentation, voir le livre de Gehrlein [2006]). Une autre piste serait d'étudier des critères de stabilité moins contraignants. Par exemple, nous pourrions rechercher les constitutions pour lesquelles, pour chaque profil, on puisse trouver au moins une partition stable.

Il semble que l'élection de Georges W. Bush, ainsi que les débats sur la constitution européenne aient créé une incitation à s'intéresser aux propriètés normatives des élections indirectes. Les premiers résultats, dans la tradition des recherches en théorie du choix social, sont des théorèmes d'impossibilité ou s'en approchent. Il reste cependant de nombreuses études à mener, pour mieux comprendre les différents modes de scrutin indirects qui sont utilisés de par le monde.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ARROW K.J. [1963], *Social Choice and Individual Values*, 2nd ed, New Haven: Yale University Press.

BERVOETS S. [2005], *Freedom of Choice and Democracy*, Thèse de Doctorat, Université de la Méditerranée.

BERVOETS S. et MERLIN V. [2006], "Stability and manipulation in representative democracies", *UFAE and IAE working paper 669.06.*

CHAMBERS C. [2003] "Consistent Representative Democracy", *Caltech HSS Working paper 1217*

FINE K. [1972] "Some necessary and sufficient conditions for representative decision on two alternatives", *Econometrica*, 40, p.1083-1090.

FISHBURN P.C. [1971] "The theory of representative majority decision", *Econometrica*, 39, p.279-284.

GIBBARD A. [1973] "Manipulation of voting schemes: a general result", *Econometrica*, 41,p.587-601.

GEHRLEIN W.V. [2006] *Condorcet's Paradox*, Springer, Berlin, Heidelberg.

HARTVIGSEN D. [2006] "Vote trading in public elections", *Mathematical Social Sciences*, 52, p.31-48.

LAFFOND G. et LAINE J. [1999] "A general impossibility theorem on representative democracy", in de Swart H editor, *Logic, Game Theory and Social Choice, proceedings of the international conference LGS99*, p.504-521, Tilburg University Press.

LAFFOND G. et LAINE J. [2000] "Representation in majority tournaments", *Mathematical Social Sciences*, 39, p.35-53.

MAY K.O. [1952] A set of independent necessary and sufficient conditions for simple majority decisions, *Econometrica* 20, p 680-684.

MURAKAMI Y. [1966] *Logic and Social Choice*, Dover Publications Inc, New York.

PEROTE PEÑA J. [2006] "Gerrymendering proof social welfare functions", Mimeo,

Universidad de Zaragoza.
SATTERTHWAITE M. [1975] "Strategy proofness and Arrow's conditions", *Journal of Economic Theory*, 10, p.187-217.

ANNEXE

Preuve de la Proposition 1: Soit π_0 le profil unanime pour a, π_1, π_2, … π_{n-1} une suite de profils pour lesquels les individus changent un à un leur préférence en faveur de b jusqu'à π_n, le profil unanime pour b. Par RM, on sait que $g(f(\sigma,\pi_0)) = a$ et $g(f(\sigma,\pi_n)) = b$.

Supposons maintenant que $g(f(\sigma,\pi_1)) = b$ pour un σ donné. Par Stabilité, b est le vainqueur pour toute partition σ. En particulier, soit σ' telle que les $m-1$ premières juridictions sont remplies des électeurs de a, et la dernière est composée de l'individu votant pour b. Alors $g(f(\sigma',\pi_1)) = g(a,\ldots,a,b) = b$. Soit σ'' telle que les $m-1$ premières juridictions sont formées de $n-2$ électeurs de a tandis que la dernière est formée d'un électeur de a et de l'électeur de b. Par RM, puisque le vainqueur final est b, il est nécessaire que $f_m(a,b) = b$.

Soit le profil π_2 et la même partition σ'', telle que la dernière juridiction est formée des deux électeurs de b. Alors $g(f(\sigma'',\pi_2)) = g(a,\ldots,a,b) = g(f(\sigma',\pi_1)) = b$. Par Stabilité, $g(f(\sigma,\pi_2)) = b$ pour tout σ. En particulier, soit σ''' tel que les $m-2$ premières juridictions sont remplies par $n-3$ électeurs votant pour a, la juridiction $m-1$ est un singleton d'un électeur de b et la juridiction m est formée par un a et un b. Comme $f_m(a,b) = b$, $g(f(\sigma''',\pi_2)) = g(a,\ldots,a,b,b) = b$. Ainsi, le profil fédéral avec deux b seulement donne aussi b comme vainqueur.

On peut continuer à faire changer les électeurs un par un et en choisissant deux partitions adéquates, on montre que ces profils de vote donnent aussi b comme vainqueur. Après $n-2$ itérations, on obtient $g(f(a,b,\ldots,b)) = b$. Enfin, on a que $g(f(\sigma,\pi_n)) = g(b,\ldots,b) = b$.

Ainsi, si la présence d'un seul b dans le profil de vote donne b comme vainqueur (c'est la cas en π_1), c'est que tous les profils de vote autres que π_0 donnent b comme vainqueur.

On a montré que $[g(f(\sigma,\pi_1)) = b \Longrightarrow g(f(\sigma,\pi_2)) = b \Longrightarrow \ldots \Longrightarrow g(f(\sigma,\pi_{n-1})) = b]$. Par contraposée, $[g(f(\sigma,\pi_{n-1})) = a \Longrightarrow g(f(\sigma,\pi_{n-2})) = a \Longrightarrow \ldots \Longrightarrow g(f(\sigma,\pi_1)) = a]$. Ainsi, s'il existe un profil contenant au moins un a et un b qui donne a comme vainqueur, alors tous les profils contenant au moins un a donnent a comme vainqueur. On peut donc conclure que soit $a \succ b$ soit $b \succ a$. ■

Corollaire 1 *Si $a \succ b$, alors $f_j(a,b) = a$ pour tout $j \in M$.*

Preuve de la Proposition 2: Soit $\pi = (c,\ldots,c,b)$. Puisque $b \succ c$, $g(f(\sigma,\pi)) = b$. Considérons σ telle que la dernière juridiction contient un électeur de c et l'électeur de b. Cette partition donne $g(c,\ldots,c,f_m(b,c)) = b$. Par RM $f_m(b,c) = b$. Soit maintenant $\pi' = (a,\ldots,a,b,c)$. Avec la même partition, $g(f(\sigma,\pi')) = g(a,\ldots,a,f_m(b,c)) = g(a,\ldots,a,b)$. Mais puisque $a \succ b$, $g(f(\sigma,\pi')) = a$. Changeons la partition en σ' tel que les $m-2$ premières juridictions sont remplies de $n-3$ électeurs de a, la juridiction $m-1$ est un singleton de l'électeur de c et la dernière est donc composée d'un électeur de a et un électeur de b. Alors $g(f(\sigma',\pi')) = g(a,\ldots,a,c,f_m(a,b))$. Mais $a \succ b$ implique $f_m(a,b) = a$. Ainsi, $g(f(\sigma',\pi')) = g(a,\ldots,a,c,a)$. Par Stabilité,

$g(f(\sigma, \pi')) = g(f(\sigma', \pi')) = a$. Finalement, ce dernier profil fédéral peut être généré par le profile de vote $\pi'' = (a, \ldots, a, c)$ et la partition adéquate σ''. Puisque $g(f(\sigma'', \pi'')) = a$, et $X(\pi'') = \{a, c\}$, la proposition 1 nous dit que $a \succ c$. ■

Avant de démontrer le théorème 2, une dernière proposition est nécessaire. Celle-ci dit que tous les profils de vote qui contiennent les mêmes options (mais en nombre potentiellement différent) donnent le même résultat.

Proposition 3 *Si C est une constitution fédérale qui satisfait Stabilité et RM, et si π et π' sont tels que $X(\pi) = X(\pi')$, alors $g(f(\sigma, \pi)) = g(f(\sigma, \pi'))$*

Preuve de la proposition 3: Il y a deux cas à distinguer : $|X(\pi)| < n$ et $|X(\pi)| = n$.

Si $|X(\pi)| < n$, il existe au moins, dans le profil π, deux individus qui votent pour le même candidat. Considérons maintenant le profil π_1 issu de π avec $\pi|_j = \pi_1|_j$ pour tout $j \neq k$ et $\pi|_k \neq \pi_1|_k$, mais tel que $X(\pi_1) = X(\pi)$. Ainsi, un seul électeur a changé de candidat, mais les deux profils contiennent toujours autant de candidats distincts. On va montrer que pour deux tels profils, forcément $g(f(\sigma, \pi)) = g(f(\sigma, \pi_1))$. Cela permettra de conclure le cas $|X(\pi)| < n$, puisque tout profil π' tel que $X(\pi') = X(\pi)$ peut être obtenu à partir de π par une suite finie de changements d'un seul vote (passant donc de π à π_1, de π_1 à π_2, etc... jusqu'à π').

Ainsi, $\pi|_i = \pi_1|_i \; \forall i \neq k$ et $\pi|_k \neq \pi_1|_k$. Sélectionnons dans π l'option ayant la plus haute priorité (puisque C satisfait Stabilité et RM, il existe un ordre linéaire de priorité sur les options) et appelons-la a_1. Il existe au moins un individu j, autre que k tel que $\pi|_j = \pi_1|_j = a_1$. Soit la partition σ' telle que $J_1 = \{j, k\}$. Ainsi, $f_1(\sigma', \pi|_k) = f_1(\sigma', \pi_1|_k) = a_1$, et comme les autres juridictions ne connaissent aucun changement entre π et π_1, on peut en conclure que $g(f(\sigma', \pi)) = g(f(\sigma', \pi_1))$ et ceci reste vrai pour tout σ par stabilité.

Revenons maintenant au cas $|X(\pi)| = n$. Soient π et π' tels que $X(\pi) = X(\pi')$ et supposons $g(f(\sigma, \pi)) \neq g(f(\sigma, \pi'))$. Puisque la stabilité est satisfaite, cela implique que $g(f(\sigma, \pi)) \neq g(f(\sigma', \pi')) \; \forall \; \sigma, \sigma'$. Pour π, choisissons σ telle que $\pi|_{J_1} = (a_1, a_n)$, $\pi|_{J_j} = (a_j)$ pour j de 2 à $m-1$ et enfin $\pi|_{J_m} = (a_m, \ldots, a_{n-1})$. Choisissons σ' pour π' de la même manière. Par stabilité, $g(f(\sigma, \pi)) \neq g(f(\sigma', \pi'))$ et nous savons plus particulièrement que $f_1(\sigma, \pi|_{J_1}) = a_1 = f_1(\sigma', \pi'|_{J_1}) = a_1$ puisque $a_1 \succ a_n$. Considérons maintenant les profils π_1 et π'_1 pour lesquels les individus ayant respectivement voté pour a_n dans π_1 et π'_1 votent maintenant pour a_1, les autres votes restant inchangés. On obtient toujours $f_1(\sigma, \pi_1|_{J_1}) = f_1(\sigma', \pi'_1|_{J_1}) = a_1$, d'ou $g(f(\sigma, \pi)) = g(f(\sigma, \pi_1))$ et $g(f(\sigma', \pi')) = g(f(\sigma', \pi'_1))$. Or, nous savons que $X(\pi_1) = X(\pi'_1)$ et $|X(\pi_1)| < n$, donc $g(f(\sigma, \pi_1)) = g(f(\sigma, \pi'_1)$. Ainsi, $g(f(\sigma, \pi)) = g(f(\sigma, \pi'))$ ce qui est une contradiction. ■

Preuve du Théorème 2: La règle de Priorité satisfait à la fois Stabilité et RM. La partie nécessaire de la preuve est faite en deux parties. La première partie est faite par récurrence et montre que si C satisfait RM et Stabilité, alors $g(f(\sigma, \pi)) = Max_{\succ} X(\pi)$. La deuxième partie nous permettra de montrer que C est de cette forme, alors forcément les f_j et g le sont aussi et l'ordre $\succ$ est le même pour tous les f_j et g. C est ainsi une règle de priorité.

D'après les propositions 1 et 2, on sait que si C satisfait Stabilité et RM, alors il existe une relation d'ordre linéaire $\succ$ sur les options de X. Supposons que cette relation est donnée par $a_1 \succ \ldots \succ a_p$.

Définition 6 *On dit que a domine $A \in 2^{X \backslash \{\emptyset\}}$ si $g(f(\sigma, \pi)) = a$ pour tout profil de vote π tel que $a \in X(\pi)$ et $X(\pi) = A$*

Lorsque a domine un ensemble de candidats A, aucun candidat de A ne peut remporter l'élection dès lors que a reçoit au moins une voix. Nous allons montrer alors que a_1 domine $\{a_{p-1}, a_p\}$ comme initialisation de la récurrence, puis nous supposerons que a_1 domine $\{a_i, \dots a_p\}$ et nous montrerons qu'alors, a_1 domine $\{a_{i-1}, \dots a_p\}$. Notons que pour que cette étape de la récurrence ait un sens, il est nécessaire que $|X(\pi)| = |\{a_1, a_{i-1}, \dots a_p\}| \leq n$. Par conséquent, $n \geq p - i + 3$. Le raisonnement qui sera ainsi fait pourra être reconduit avec n'importe quelle permutation sur les options $\{a_2, \dots, a_p\}$, concluant ainsi la preuve.

Initialisation de la récurrence : a_1 domine a_{p-1} et a_p, mais aussi a_{p-1} domine a_p. Par le corollaire 1, cela implique que $f_m(a_{p-1}, a_p\}) = a_{p-1}$. Considérons le profil de vote $\pi = (a_1, \dots a_1, a_{p-1}, a_p)$ et la partition σ telle que $J_m = \{a_{p-1}, a_p\}$ tandis que les autres juridictions sont remplies d'électeurs de a_1. Alors $g(f(\sigma, \pi)) = g(a_1, \dots, a_1, a_{p-1})$, mais puisque $a_1 \succ a_{p-1}$, on obtient $g(f(\sigma, \pi)) = a_1$. Il existe donc un profil π tel que $X(\pi) = \{a_1, a_{p-1}, a_p\}$ et $g(f(\sigma, \pi)) = a_1$. Par la proposition 3, on a donc que $g(f(\sigma, \pi')) = a_1 \ \ \forall \pi'$ tel que $X(\pi) = X(\pi')$. Cela nous conduit à la dominance de a_1 sur $\{a_{p-1}, a_p\}$.

Hypothèse de la récurrence : a_1 domine $\{a_i, \dots a_p\}$.
Considérons $\pi_1 = (a_1, a_i, \dots, a_i, a_{i+1}, \dots, a_p)$ (ce profil peut être construit car $n \geq p - i + 3$) et la partition σ_1 telle que $J_1 = \{a_1, a_i\}$. Puisque $X(\pi_1) = \{a_1, a_i, \dots a_p\}$, par l'hypothèse de récurrence on a $g(f(\sigma_1, \pi_1)) = a_1$. Soit le profil $\pi_2 = (a_1, a_{i-1}, a_i, \dots, a_i, a_{i+1}, \dots, a_p)$ qui est le même que π_1 sauf pour l'individu qui était dans J_1 qui choisit maintenant a_{i-1} au lieu de a_i. Puisque $a_1 \succ a_{i-1}$, on sait que le résultat en J_1 sera a_1, exactement comme avec π_1. Puisque les autres individus n'ont changé ni de vote ni de juridiction, on peut conclure que $g(f(\sigma_1, \pi_1))$ produira le même profil fédéral Π et par conséquent, $g(f(\sigma_1, \pi_1)) = g(f(\sigma_1, \pi_2)) = a_1$. La proposition 3 permet de conclure cette première partie.

On a donc $g(f(\sigma, \pi)) = Max_{\succ} X(\pi)$. Par ailleurs, si C est une Constitution satisfaisant Stabilité et Représentativité Minimale, alors les règles f_j et g sont telles que $f_j(\pi|_{J_j}) = Max_{\succ} X(\pi|_{J_j})$ et $g(\Pi) = Max_{\succ} X(\Pi)$. En effet, soit $\succ$ l'ordre de priorité pour C. Pour chaque sous ensemble d'options A, considérons un profil pour lequel un seul individu i choisit l'alternative a qui a la plus haute priorité selon $\succ$ dans A ($a = g(f(\sigma, \pi))$). Par RM, une seule juridiction peut et doit élire a. Donc, quelle que soit la juridiction j dans laquelle i se trouve et quelles que soient les autres options de $X(\pi|_{J_j})$, a est choisi par f_j. Ce raisonnement est valide si on met plusieurs électeurs de a ensemble, ainsi $f_j(\pi|_{J_j}) = Max_{\succ} X(\pi|_{J_j})$. De plus, si a est élu, c'est qu'au moins une juridiction a élu a, par conséquent $g(\Pi) = Max_{\succ} X(\Pi)$. ■