CHAPITRE 1

Volatilité et risques financiers

Michel LUBRANO using lecture notes by Luc Bauwens

Avril 2011

Contents

1 Introduction

Cours PST salle 402, Video auprès de Josette à l'accueil de la Fac de Marseille

Lundi 11 Avril: 10H à 12h

Mardi 12 Avril: 14H à 16H

Mercredi 13 Avril: 14H à 16H

Lundi 18 Avril: 14h à 16h

2 Rendements et volatilité

2.1 Rendements

Soit p_t le prix d'un actif à la date t. On va s'intéresser à une transformation de ce prix par rapport à une durée, ou une fréquence d'échantillonnage. C'est le **rendement**

$$y_t = \log p_t - \log p_{t-1} \simeq \frac{p_t - p_{t-1}}{p_{t-1}}$$

On choisit en général de multiplier par 100 pour passer en pourcentages.

La fréquence d'une série de rendements est la longueur de l'intervalle de temps entre t and $t-1$. On aura des données de basse fréquence quand l'intervalle d'échantillonnage est la semaine ou le mois. On commence à avoir des hautes fréquences à partir d'un jour ou à partir des données intra-day.

Il y a des problèmes particuliers aux données haute fréquence.

1. pour la semaine, pas de pb
2. pour les journalières, il y a des WE, des jours fériés où les marchés sont fermés. Donc que va t il se passer à la reprise.
3. Intra day, les mouvement ne sont pas uniformes au cours de la journée. Que se passe-t-il à l'ouverture, à midi, à la fermeture? Microstructure

2.2 Volatilité

On passe maintenant à la volatilité. La volatilité d'un actif financier fait allusion au fait que le prix de l'actif, et donc le rendement associé, sont aléatoires. Ceci signifie qu'on ne peut pas être certain, a priori, des prix futurs (ou des rendements). Dès lors, le rendement fluctue dans le temps. Il monte et descend d'un jour à l'autre, ou même d'une transaction à l'autre sur le marché.

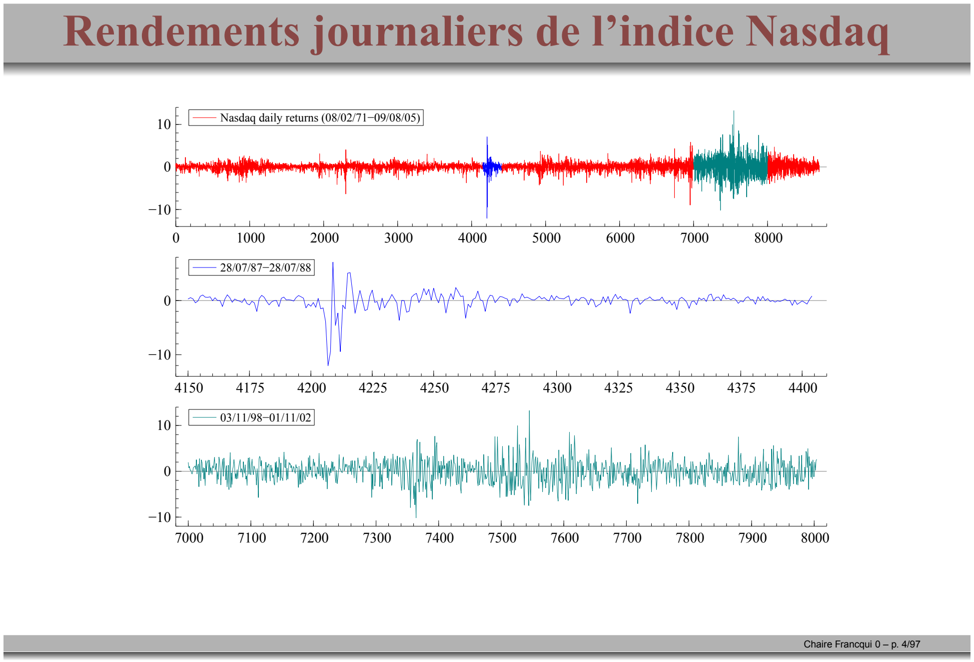

Figure 1: Rendements du Nasdaq sur différentes périodes

Techniquement, la volatilité d'un actif est l'écart-type du rendement considéré comme une variable aléatoire.

Le rendement et la volatilité sont toujours relatifs à un intervalle de temps sous-jacent (jour, semaine, année...).

On part des prix journaliers sur 6 jours consécutifs

$$p_{t-1}, p_t, p_{t+1}, p_{t+2}, p_{t+3}, p_{t+4}$$

Il correspond 5 rendements journaliers

$$y_t, y_{t+1}, \dots, y_{t+4}$$

Le rendement à 5 jours (week) est égal à la somme des rendements journaliers

$$y_w = \sum_{i=0}^{4} y_{t+i} = \log p_{t+4} - \log p_{t-1}$$

Si les rendements sont equidistribués IID, alors la moyenne des rendements weekly est égale à 5 fois la moyenne des rendements journaliers et la variance weekly à 5 fois la variance daily (somme des variances si indépendance).

La volatilité est de façon inhérente une variable inobservable. Comme le rendement, elle évolue de façon aléatoire. Ceci n'implique pas qu'elle soit totalement imprévisible. La volatilité peut être mesurée indirectement, puisque les rendements sont observés. La mesure de la volatilité est basée sur des modèles économétriques. Les modèles relient les observations sur les rendements à la volatilité. Comment faire de l'inférence sur la volatilité à partir des rendements a été restera un thème de recherche central en économétrie financière.

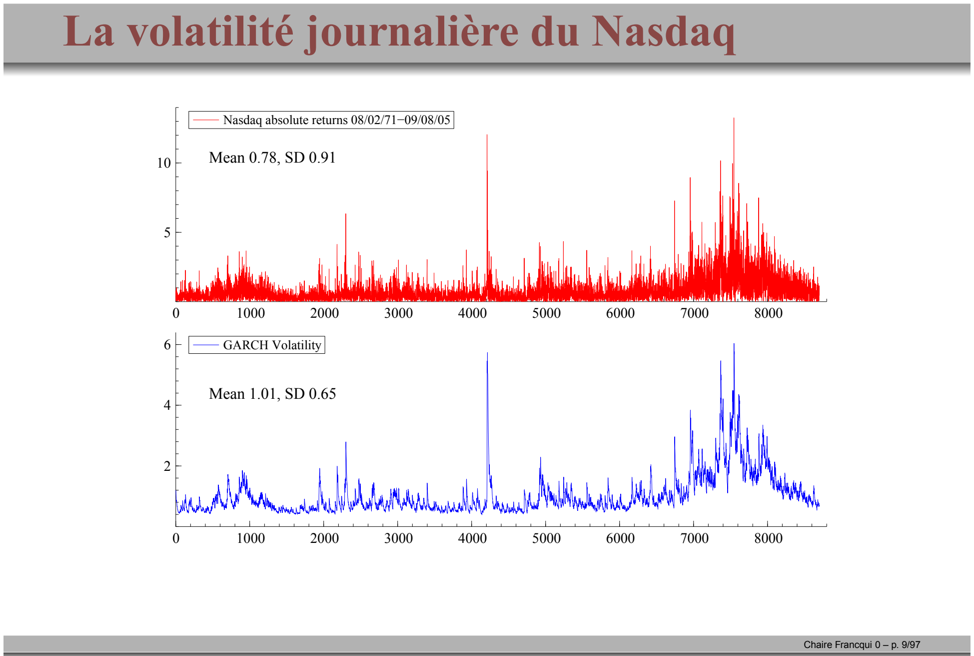

Figure 2: Volatilité journalière du Nasdaq

2.3 Propriétés des rendements

1. Les rendements fluctuent autour de 0 à court terme. Pour les indices de marché et pour les titres de firmes qui survivent, la moyenne est légèrement positive à long terme.

2. La moyenne est nettement plus petite que la volatilité. Par conséquent, connaître la moyenne ne permet pas de prédire avec précision le rendement futur et certainement pas de faire un profit sans prendre des risques.

3. Les rendements sont peu autocorrélés (et d'autant moins que la fréquence est basse). Cette propriété implique que les rendements ne sont pas prévisibles à partir de leurs réalisations passées.

4. Les grands rendements (positifs ou négatifs) ont tendance à se suivre, et les petits rendements également. La volatilité se produit en "grappes" (volatilité clustering).

5. Cela se traduit par une fonction d'autocorrélation (ACF) des carrés des rendements, qui decroît lentement à partir d'une valeur faible mais positive. Cette forme typique de l'ACF est plus prononcée pour une fréquence élevée que faible.

6. Cette propriété implique que la volatilité est prévisible dans une certaine mesure (ce qui n'est pas le cas pour les rendements).

7. Il y a plus de rendements extrêmes que si la distribution était normale (non-normalité).

8. La proportion de rendements extrêmes négatifs est plus élevée que celle de rendements extrêmes positifs (asymétrie négative de la distribution).

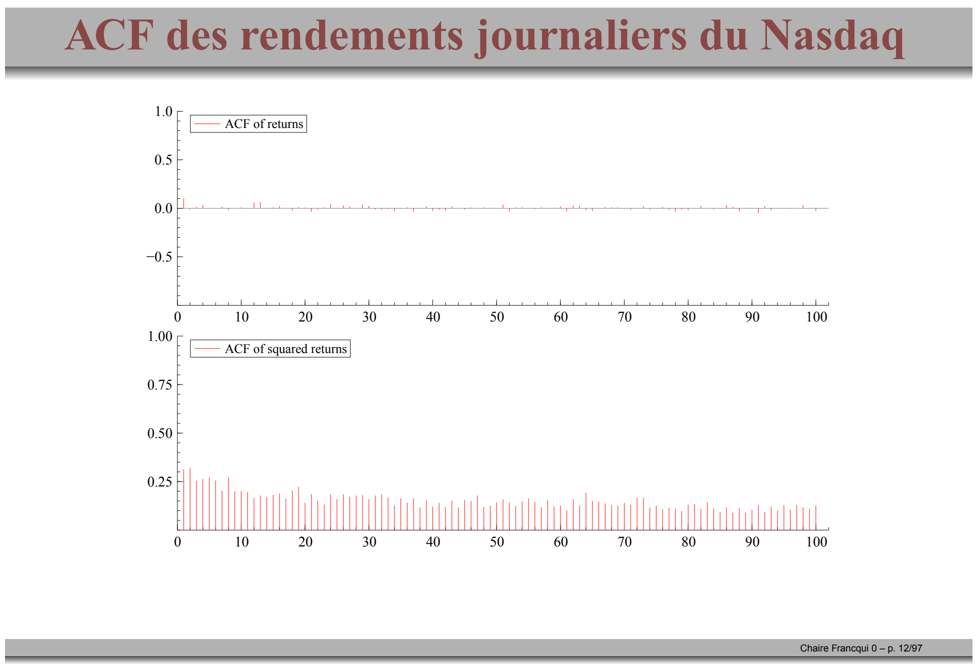

Figure 3: ACF journalière du Nasdaq

2.4 Mesures de volatilité

1. Le rendement absolu: $|y_t|$

2. Fenetres roulantes: l'écart-type empirique des r rendements precedents:

$$\sigma_t(r) = \sqrt{\frac{1}{r}\sum_{i=0}^{r-1}(y_{t-i} - \bar{y}_t)^2} \text{ où } \bar{y}_t = \frac{1}{r}\sum_{i=0}^{r-1} y_{t-i}$$

   Inconvenient: le choix de r est arbitraire.

3. Mesures basees sur un modele (RiskMetrics, GARCH, volatilite stochastique).

4. Mesures basees sur des rendements de frequence plus elevee: la volatilite realisee, l'ecart haut/bas.

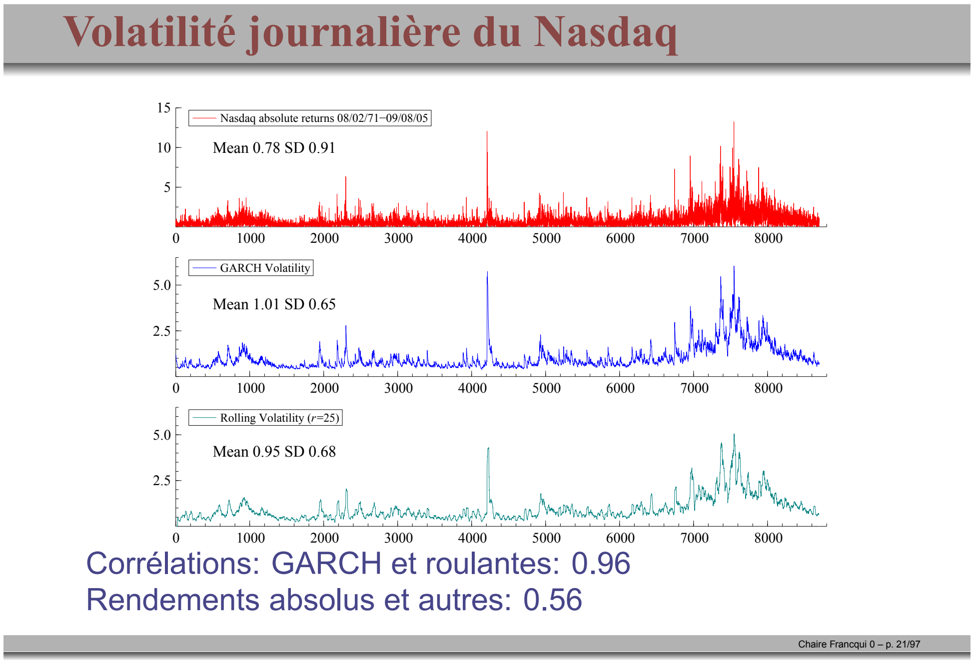

Figure 4: Mesure de volatilité journalières du Nasdaq

2.5 Realised volatility

On suppose que l'on a des observations sur les rendements qui sont de fréquence plus élevée

$$y_{t,1}, y_{t,2}, \dots, y_{t,k}$$

On a donc k rendements de frequence superieure (par exemple: a 15 minutes dans un jour t: $k = 96$). On verra avec le chapitre suivant l'utilisation de données à 5 minutes. Le rendement journalier est alors

$$y_t = \sum_{h=1}^{k} y_{t,k}$$

On a vu que $\text{Var}(y_t) = k\text{Var}(y_{t,h})$, et que $(1/k)\sum_{h=1}^{k}(y_{t,h} - \bar{y}_t)^2$ est un estimateur convergent de $\text{Var}(y_{t,h})$.

Dès lors, $\sum_{h=1}^{k}(y_{t,h} - \bar{y}_t)^2$ est un estimateur convergent de $\text{Var}(y_t)$.

La volatilite realisee est definie par

$$RV_t = \sqrt{\sum_{h=1}^{k}(y_{t,h} - \bar{y}_t)^2} \simeq \sqrt{\sum_{h=1}^{k}(y_{t,h})^2}$$

2.6 Volatilité intra day

1. La volatilité change aussi pendant la journée.

2. Sur les marché boursiers (NYSE, Euronext, ...), la volatilité est plus élevée au début et à la fin des séances, qu'au milieu.

3. Même si cette caractéristique est prise en compte, il subsiste des grappes de volatilité.

4. Mesurer la volatilité à une fréquance très élevée, de façon presque continue, est possible en utilisant l'information sur toutes les transactions pendant les séances de marché. Voir Bauwens and Hautsch (JoFE, 2006): "Stochastic conditional intensity models".

3 La modélisation de la volatilité

3.1 Riskmetrics

RiskMetrics de JP Morgan est un systeme de gestion du risque qui utilise comme modele de volatilite

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= (1-\beta)\sum_{i=1}^{\infty}\beta^{i-1}y_{t-i}^2 \\ &= \beta\sigma_{t-1}^2 + (1-\beta)y_{t-1}^2, \end{aligned}$$

ou $\beta = 0.94$ est la valeur proposee par defaut.

RiskMetrics repose en plus sur l'hypothese que les rendements standardises (y_t/σ_t) sont independants et distribues selon une loi N(0, 1).

3.2 Modèle GARCH

Le modèle GARCH est une version plus souple de RiskMetrics:

$$\begin{aligned} y_t|y_0^{t-1} &\sim N(0, \sigma_t^2) \\ \sigma_t^2 &= \omega + \alpha y_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2 \end{aligned}$$

On peut introduire le changement de paramétrisation suivant où $\omega = (1-\alpha-\beta)\sigma^2$

$$\sigma_t^2 - \sigma = \beta(\sigma_{t-1}^2 - \sigma^2) + \alpha(y_{t-1}^2 - \sigma^2)$$

On peut montrer que la variance marginale Var$(y_t) = \sigma^2 = \mathrm{E}(\sigma_t^2)$ si $\alpha + \beta < 1$.

Riskmetrics correspond à une restriction de ce modèle avec

$$\alpha = 1 - \beta \qquad \omega = \sigma^2 = 0.$$

On va estimer ce modèle sur le NASDAQ

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= 0.01 + 0.11y_{t-1}^2 + 0.88\sigma_{t-1}^2 \\ &= 1 + 0.11(y_{t-1}^2 - 1) + 0.88(\sigma_{t-1}^2 - 1) \end{aligned}$$

puisque $\sigma^2 = 0.01/(1 - 0.11 - 0.88) = 1.$

Ainsi, la prevision faite en $t-1$ de σ_t^2 pour $t = 10/08/2005$ (le jour suivant la date de fin d'echantillon) est

$$\sigma_t^2 = 1 + 0.88(0.58 - 1) + 0.11[(0.38)2 - 1] = 0.55$$

car le rendement observé le 09/08/2005 était de 0.38%.

3.3 Volatility clustering

Une valeur élevée de σ_{t-1}^2 dans l'equation GARCH a deux effets:

1. un efet direct car $\beta\sigma_{t-1}^2$ est élevé
2. un effet indirect : comme $y_{t-1} \sim N(0, \sigma_{t-1}^2)$, alors αy_{t-1}^2 peut aussi être élevé.

- L'existence des grappes de volatilité engendre plus de valeurs extrêmes et moins de valeurs centrales (proches de 0) que si les rendements étaient indépendants.
- De grands rendements (positifs ou négatifs) ont tendance à être suivis par de grands rendements (positifs ou négatifs). De même, des rendements faibles tendent à se produire en grappes.
- Ce mécanisme provoque l'apparition d'une proportion plus élevée de rendements extrêmes et également de rendements faibles que si les rendements étaient normalement distribués.

3.4 Garch and leverage effects

1. On constate que la volatilite d'une action tend a augmenter davantage apres une mauvaise nouvelle (cad un rendement negatif) qu'apres une bonne nouvelle. Si le rendement est negatif, la valeur boursiere de la firme diminue, donc le rapport dette/fonds propres est plus eleve, et l'action est plus risquee.
2. La courbe d'impact des nouvelles trace la volatilite en fonction du rendement precedent, ceteris paribus. Cette courbe devrait etre a un niveau plus eleve pour un rendement negatif que pour un rendement positif.
3. Le modele GJR-GARCH permet une courbe d'impact asymetrique:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha^+ y_{t-1}^2 \mathbb{1}_{y_{t-1}>0} + \alpha^- y_{t-1}^2 \mathbb{1}_{y_{t-1}<0} + \beta\sigma_{t-1}^2$$

avec $\alpha^- > \alpha^+$.

Bilan des GARCH

1. Ils sont faciles à utiliser, comprendre, estimer et raffiner (moyenne non-nulle et évolutive, distributions autres que la loi normale: Student, asymétrie...).

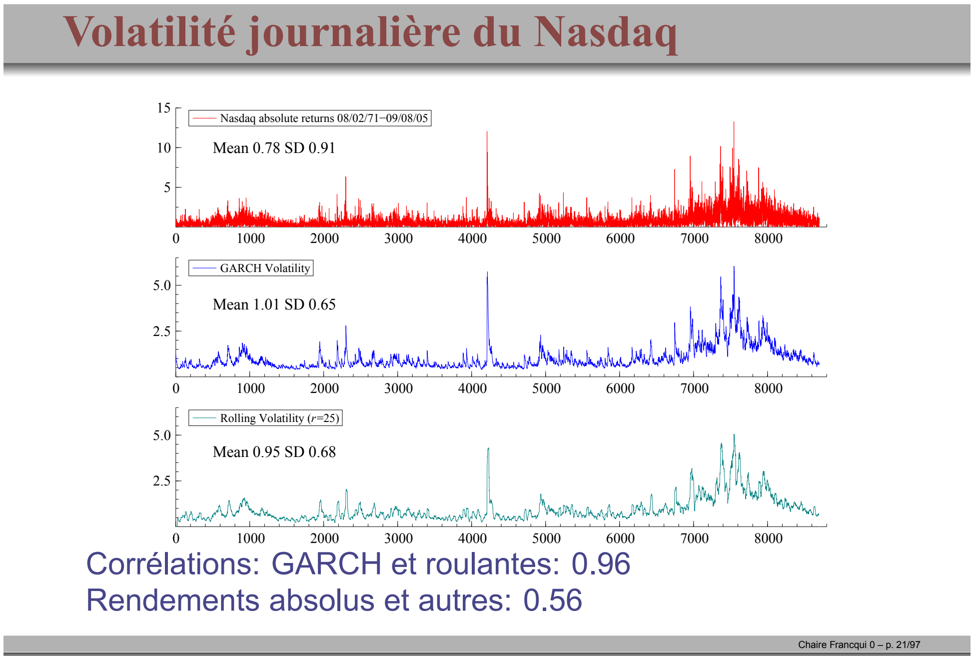

Figure 5: Mesure de volatilité journalières du Nasdaq

2. Pour des séries longues. ils sont trop peu souples. Empiriquement, ils donnent l'impression d'une persistence trop importante de la volatilité.
3. Ils sont sujets à controverse ('boîte noire', peu d'aspect explicatif).
4. Une nouvelle génération de modèles GARCH plus souples est en développement.
5. Les modèles alternatifs qui utilisent une information identique ne donnent pas une meilleure performance.

4 La suite du cours

1. Modélisation de la volatilité au moyen des modèles MIDAS
2. Bayesian option pricing using ARCH
3. Value at risk CAVIAR (?)