Chapitre 1

Two types of agents

On considère une population comportant deux types d'agents qui ne diffèrent que par leur productivité, ω_1 et ω_2, avec $\omega_2 > \omega_1$. On suppose la condition de Spence-Mirrlees vérifiée. Soit n_1 et n_2 le nombre d'agents dont la productivité est, respectivement, ω_1 et ω_2. On souhaite caractériser deux points du barème optimal, c'est-à-dire trouver le couple revenu brut/revenu disponible pour chacun des types. On commence par montrer qu'il y a toujours séparation des types à l'optimum.

Proposition 1 *A tout optimum de taxation optimale, il y a séparation des types (absence de bouchonnement).*

Preuve.
(1) *La propriété de Spence-Mirrlees introduit un régionnement du plan* délimité par les conditions d'incitation. On a ainsi : $H \succ_2 E$ et $H' \succ_1 E$; $E \succ_2 H'$; et $E \succ_1 H$. Tout contrat dans l'espace (c, y) sépare donc les types.
(2) Il reste à montrer qu'un équilibre mélangeant comme E rapporte moins à l'Etat qu'un équilibre séparateur. Plus précisément, il faut établir qu'il existe des contrats (E, H) avec $E \neq H$ qui coûtent moins à l'Etat que la seule proposition du contrat E. Il est possible d'opérer un régionnement du plan à partir de E en terme de variations des recettes fiscales, comme l'illustre la figure 1.1. Deux cas doivent donc être considérés.
a) Supposons que le taux marginal de substitution en E du type 2 soit inférieur à celui du type 1. La courbe d'indifférence de 2 en E a une pente inférieure à 1. Il existe un contrat H, se situant dans le cône $\Delta T > 0$, qui procure davantage de recettes fiscales que la seule proposition de E aux deux agents et offre une utilité supérieure à 2 : $H \succ_2 E$. Les individus de type 1 continuent de choisir E et les individus de type 2 choisissent H. (H, E) procure plus de recettes fiscales que E.
b) Supposons que le taux marginal de substitution en E du type 2 soit supérieur à celui du type 1. Il s'agit du cas symétrique. ■

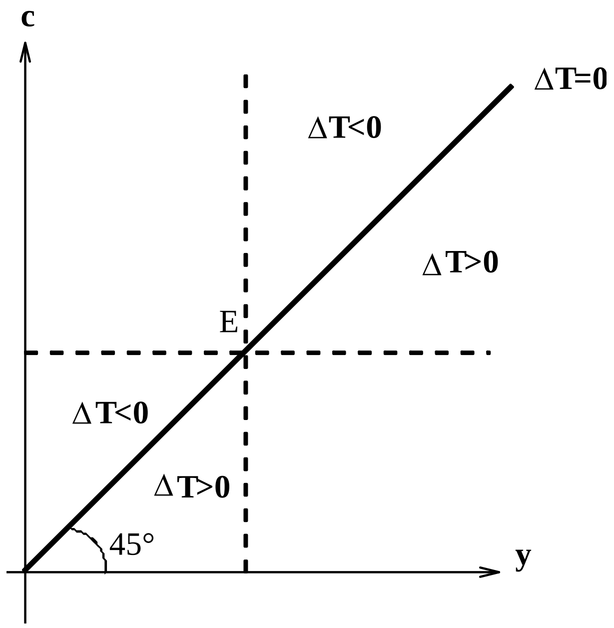

FIG. 1.1 – Régionnement du plan

1.1 Résolution algébrique

On cherche à déterminer les optima de Pareto en second rang. Lorsqu'il y a simplement deux types, le problème de taxation optimale a la forme suivante :

$$\max V_2\left(c_2, y_2\right) \tag{1.1}$$

sous les contraintes :

$$V_1\left(c_1, y_1\right) \geq \overline{V}_1 \tag{1.2}$$

$$V_1\left(c_1, y_1\right) \geq V_1\left(c_2, y_2\right) \tag{1.3}$$

$$V_2\left(c_2, y_2\right) \geq V_2\left(c_1, y_1\right) \tag{1.4}$$

$$n_1\left(y_1 - c_1\right) + n_2\left(y_2 - c_2\right) \geq R \tag{1.5}$$

Le Lagrangien de ce problème s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = V_2\left(c_2, y_2\right) &+ \mu\left[V_1\left(c_1, y_1\right) - \overline{V}_1\right] + \lambda_1\left[V_1\left(c_1, y_1\right) - V_1\left(c_2, y_2\right)\right] \\ &+ \lambda_2\left[V_2\left(c_2, y_2\right) - V_2\left(c_1, y_1\right)\right] + \gamma\left[n_1\left(y_1 - c_1\right) + n_2\left(y_2 - c_2\right) - R\right] \end{aligned} \tag{1.6}$$

où μ, λ_1, λ_2, γ sont les multiplicateurs respectifs des différentes contraintes. Les relations d'exclusion associées aux contraintes d'incitation (1.3) et (1.4) sont :

$$V_1(c_1, y_1) \geq V_1(c_2, y_2);\ \lambda_1 \geq 0;\ \lambda_1 [V_1(c_1, y_1) - V_1(c_2, y_2)] = 0 \tag{1.7}$$

$$V_2(c_2, y_2) \geq V_2(c_1, y_1);\ \lambda_2 \geq 0;\ \lambda_2 [V_2(c_2, y_2) - V_2(c_1, y_1)] = 0 \tag{1.8}$$

Si on suppose que $R = 0$, le problème est purement redistributif. R peut être positif, à condition que les biens publics financés n'entrent pas dans la fonction d'utilité des agents. Par la suite, on considère la situation où $R = 0$. Du fait de la propriété établissant qu'il n'y a pas de bouchonnement, les deux contraintes d'incitation ne peuvent être serrées à l'inégalité simultanément. Par conséquent, on écarter le cas $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$. Trois cas doivent donc être envisagés :

- $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 0$;
- $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 = 0$;
- $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 > 0$;

Les conditions du premier ordre s'écrivent :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_1} = 0 \Leftrightarrow (\mu + \lambda_1) V_{1c}(c_1, y_1) - \lambda_2 V_{2c}(c_1, y_1) - \gamma n_1 = 0 \tag{1.9}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_2} = 0 \Leftrightarrow (1 + \lambda_2) V_{2c}(c_2, y_2) - \lambda_1 V_{1c}(c_2, y_2) - \gamma n_2 = 0 \tag{1.10}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_1} = 0 \Leftrightarrow (\mu + \lambda_1) V_{1y}(c_1, y_1) - \lambda_2 V_{2y}(c_1, y_1) + \gamma n_1 = 0 \tag{1.11}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_2} = 0 \Leftrightarrow (1 + \lambda_2) V_{2y}(c_2, y_2) - \lambda_1 V_{1y}(c_2, y_2) + \gamma n_2 = 0 \tag{1.12}$$

En additionnant (1.9) et (1.11), on obtient :

$$\mu [V_{1c}(c_1, y_1) + V_{1y}(c_1, y_1)] - \lambda_2 [V_{2c}(c_1, y_1) + V_{2y}(c_1, y_1)] + \lambda_1 [V_{1c}(c_1, y_1) + V_{1y}(c_1, y_1)] = 0 \tag{1.13}$$

En additionnant (1.10) et (1.12), il vient :

$$(1 + \lambda_2) [V_{2c}(c_2, y_2) + V_{2y}(c_2, y_2)] - \lambda_1 [V_{1c}(c_2, y_2) + V_{1y}(c_2, y_2)] = 0 \tag{1.14}$$

1.2 Les trois cas de figure

1.2.1 Cas 1 : $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

L'équation (1.13) s'écrit alors :

$$\mu [V_{1c}(c_1, y_1) + V_{1y}(c_1, y_1)] = 0 \Leftrightarrow \frac{V_{1y}(c_1, y_1)}{V_{1c}(c_1, y_1)} = -1 \Leftrightarrow \frac{dc_1}{dy_1} = 1 \tag{1.15}$$

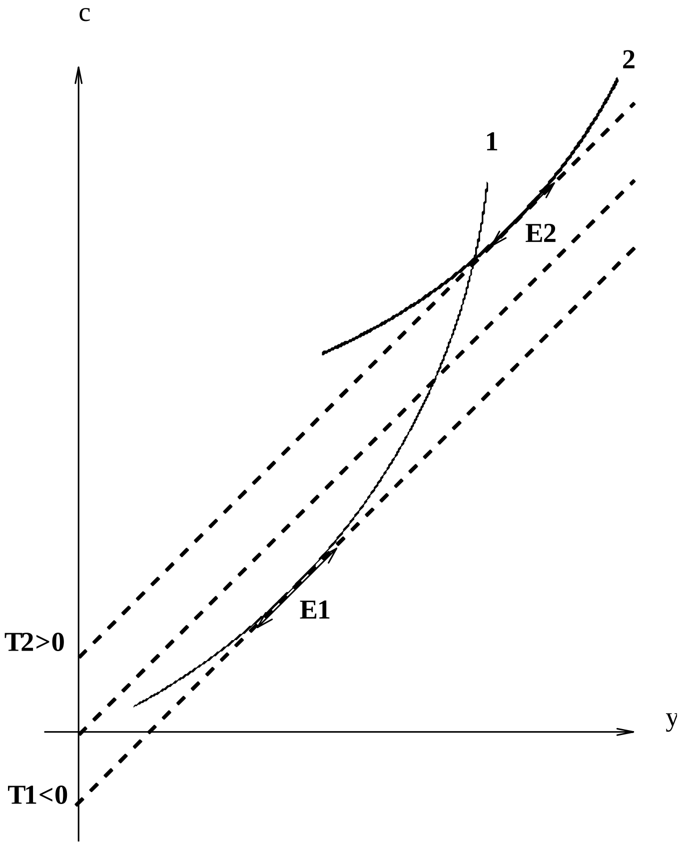

FIG. 1.2 – $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

Le taux marginal d'imposition à l'équilibre choisi par le type 1 est nul. A l'aide de (1.14), on obtient :

$$\frac{V_{2y}\left(c_2, y_2\right)}{V_{1c}\left(c_2, y_2\right)} = -1 \Leftrightarrow \frac{dc_2}{dy_2} = 1 \tag{1.16}$$

Le taux marginal d'imposition est nul pour l'équilibre choisi par le type 2. Par conséquent, les seuls impôts qui peuvent être prélevés sont des impôts forfaitaires. La figure 1.2 illustre le cas considéré ici. On a représenté en pointillé la première bissectrice du repère ainsi que les droites qui lui sont parallèles, dont la pente est, bien évidemment, égale à 1. $E1$ et $E2$ sont les équilibres choisis, respectivement, pour les types 1 et les types 2. Puisque $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, on a : $V_1\left(c_1, y_1\right) > V_1\left(c_2, y_2\right)$ et $V_2\left(c_2, y_2\right) > V_2\left(c_1, y_1\right)$ en raison des relations d'exclusion. Chaque type préfère strictement son panier à celui de l'autre type. $\frac{c}{y} > 1$ pour le type 2 et $\frac{c}{y} < 1$ pour le type 1. $\frac{y-c}{y} = \frac{T}{y} < 0$ pour le type 1 et $\frac{y-c}{y} = \frac{T}{y} > 0$ pour le type 2.

Si $T_1 = T_2 = 0$, on retrouve le laissez-faire. Dans tous les autres cas, l'un des types est contributeur net et l'autre receveur net. Le sens des transferts n'est pas indiqué. La figure (1.3) illustre la situation dans laquelle la redistribution mise en oeuvre des agents

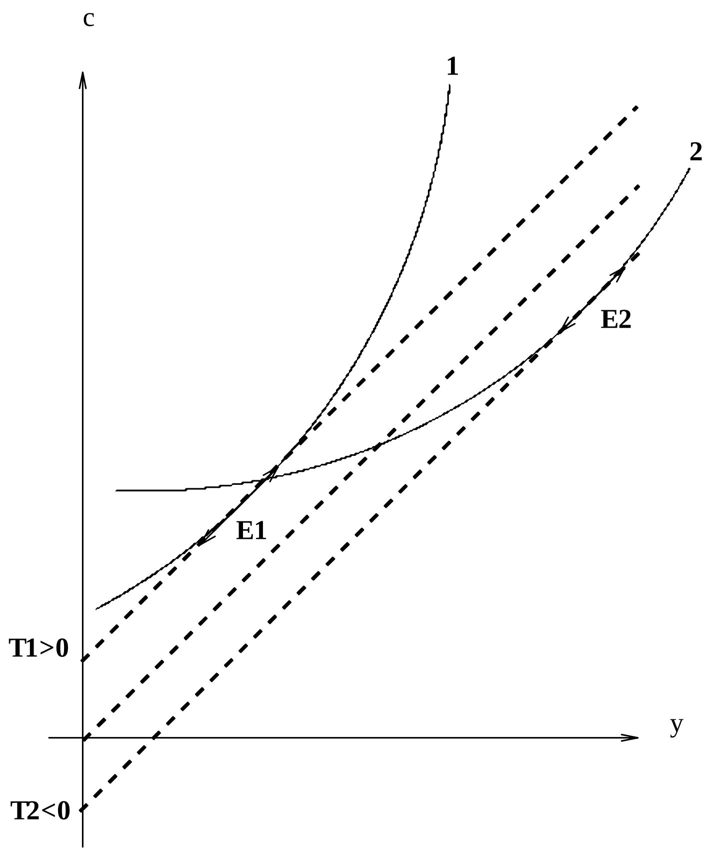

FIG. 1.3 – $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

les moins productifs vers les agents les plus productifs.

1.2.2 Cas 2 : $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 > 0$

Le haut type est indifférent entre le panier qui lui est proposé et celui proposé au bas type. En revanche, le bas type préfère strictement son panier à celui de l'autre. Ainsi (c_1,y_1) et (c_2, y_2) se trouvent sur la courbe d'indifférence du type 2. De (1.14), on tire :

$$\frac{V_{2y}\left(c_2, y_2\right)}{V_{1c}\left(c_2, y_2\right)} = -1 \Leftrightarrow \frac{dc_2}{dy_2} = 1 \tag{1.17}$$

Le haut type n'est pas taxé au dernier euro. La figure **??** illustre cette situation. En $E2$, le taux marginal de substitution est égal à 1, donc en $E1$ le taux marginal de substition est inférieur à 1. Le type 1 est taxé au dernier euro. Pour assurer l'équilibre budgétaire de l'Etat, ces deux taux sont équilibres par des transferts forfaitaires : T_1 le revenu minimum pour les bas types et T_2 l'impôt par capitation sur les hauts types.

Démontrons sur le plan algébrique que $\frac{dc_1}{dy_1} < 1$ en $E1$.

Preuve. Pour $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 > 0$, les équations (1.9) et (1.11) s'écrivent :

$$\mu V_{1c}(c_1, y_1) = \lambda_2 V_{2c}(c_1, y_1) + \gamma n_1 \tag{1.18}$$

$$\mu V_{1y}(c_1, y_1) = \lambda_2 V_{2y}(c_1, y_1) - \gamma n_1 \tag{1.19}$$

En faisant le rapport de ces deux expressions, on obtient :

$$\frac{V_{1c}(c_1, y_1)}{V_{1y}(c_1, y_1)} = \frac{\lambda_2 V_{2c}(c_1, y_1) + \gamma n_1}{\lambda_2 V_{2y}(c_1, y_1) - \gamma n_1} \tag{1.20}$$

Par suite,

$$\frac{dc_1}{dy_1} = -\frac{V_{1y}(c_1, y_1)}{V_{1c}(c_1, y_1)} = \frac{\gamma n_1 - \lambda_2 V_{2y}(c_1, y_1)}{\lambda_2 V_{2c}(c_1, y_1) + \gamma n_1} = \frac{\frac{\gamma n_1}{\lambda_2 V_{2c}(c_1, y_1)} - \frac{V_{2y}(c_1, y_1)}{V_{2c}(c_1, y_1)}}{1 + \frac{\gamma n_1}{V_{2c}(c_1, y_1)}} \tag{1.21}$$

On pose :

$$\alpha_1 = -\frac{V_{1y}(c_1, y_1)}{V_{1c}(c_1, y_1)} \tag{1.22}$$

$$\alpha_2 = -\frac{V_{2y}(c_1, y_1)}{V_{2c}(c_1, y_1)} \tag{1.23}$$

$$a = \frac{\gamma n_1}{V_{2c}(c_1, y_1)} \tag{1.24}$$

Avec ces notations, (1.21) s'écrit :

$$\frac{dc_1}{dy_1} = \alpha_1 = \frac{a + \alpha_2}{a + 1} \tag{1.25}$$

On note que a est strictement positif. De (1.25), on tire : $\alpha_1 (a + 1) = a + \alpha_2 \Leftrightarrow \alpha_2 = \alpha_1 + a(\alpha_1 - 1)$. Par conséquent, $\alpha_1 \geq 1 \Rightarrow \alpha_2 \geq \alpha_1$, ce qui est impossible en raison de la condition de Spence-Mirrlees. On a donc $\alpha_1 < 1$, c'est-à-dire $\frac{dc_1}{dy_1} < 1$: l'individu de bas type est taxé au dernier euro. ■

Afin de mieux comprendre pourquoi le raux marginal d'imposition est nul pour le haut type, on considère une situation où $E1$ et $E2$ sont situés sur la courbe d'indifférence de 2, mais où le taux marginal de substitution pour le type 2 est inférieur à 1 (i.e. le taux marginal d'imposition est positif). Sur la figure 1.4, on a représenté les parallèles à la première bissectrice passant par $E1$ et $E2$. Il apparaît qu'en passant de $E2$ à $E3$, on obtient une augmentation des recettes fiscales sans pour autant modifier l'utilité du type 2. Par conséquent, $(E1, E2)$ n'est pas l'optimum.

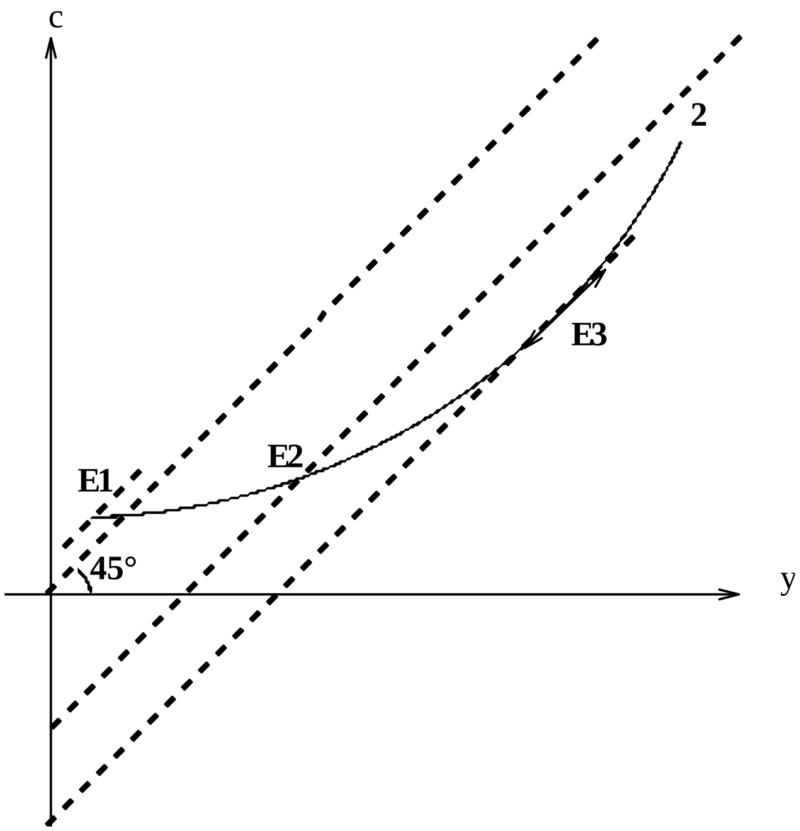

FIG. 1.4 – $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 > 0$

1.2.3 Cas 3 : $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 = 0$

Les bas types sot indifférents entre le panier qui leur est proposé et celui qui est proposé aux hauts types. Les paniers optimaux se trouvent sur une même courbe d'indifférence des bas types. Par contre, le type 2 préfère son panier, strictement. Par (1.14), on a :

$$-\frac{V_{2y}(c_2, y_2)}{V_{2c}(c_2, y_2)} = \frac{dc_2}{dy_2} = 1 \tag{1.26}$$

La taux marginal d'imposition est nul pour le bas type.

Proposition 2 *Le type 2 est subventionné au dernier euro.*

Preuve. A partir de (1.10) et (1.12), il vient avec $\lambda_2 = 0$:

$$V_{2c}(c_2, y_2) = \lambda_1 V_{1c}(c_2, y_2) + \gamma n_2 \tag{1.27}$$

$$V_{2y}(c_2, y_2) = \lambda_1 V_{1y}(c_2, y_2) - \gamma n_2 \tag{1.28}$$

Par suite,

$$\frac{dc_2}{dy_2} = -\frac{V_{2y}(c_2, y_2)}{V_{2c}(c_2, y_2)} = \frac{\gamma n_2 - \lambda_1 V_{1y}(c_2, y_2)}{\lambda_1 V_{1c}(c_2, y_2) + \gamma n_2} = \frac{\frac{\gamma n_2}{\lambda_1 V_{1c}(c_2, y_2)} - \frac{V_{1y}(c_2, y_2)}{V_{1c}(c_2, y_2)}}{1 + \frac{\gamma n_2}{\lambda_1 V_{1c}(c_2, y_2)}} \tag{1.29}$$

On pose :

$$\beta_1 = -\frac{V_{1y}(c_2, y_2)}{V_{1c}(c_2, y_2)} \tag{1.30}$$

$$\beta_2 = -\frac{V_{2y}(c_2, y_2)}{V_{2c}(c_2, y_2)} \tag{1.31}$$

$$b = \frac{\gamma n_2}{\lambda_1 V_{1c}(c_2, y_2)} \tag{1.32}$$

On note que b est strictement positif. A l'aide de ces notations, (1.29) s'écrit :

$$\beta_2 = \frac{\beta_1 + b}{1 + b} \Leftrightarrow \beta_1 = \beta_2 + b(\beta_2 - 1) \tag{1.33}$$

Si $\beta_2 \leq 1$, on a : $\beta_1 \leq \beta_2$, qui est contraire à la condition de Spence-Mirrlees. Par conséquent, on doit avoir :

$$\beta_2 > 1 \tag{1.34}$$

■

1.2.4 Commentaires

- Il y a toujours un type qui fait face à un taux marginal d'imposition non-distorsif (pas d'effet de substitution sur l'offre de travail). C'est le prix à payer pour satisfaire la condition d'incitation.
- L'implémentation de tels taux d'imposition marginaux par un système non linéaire est toujours possible puisqu'on n'a contraint le barème d'imposition qu'en deux points. Sera ainsi optimal tout barème passant par les deux paniers (contrats) optimaux et qui se situe en dessous des courbes d'indifférence d'équilibre.
- En terme de taux marginaux, le bas type est toujours moins bien traité que le haut type. Il faut d'autant moins taxer à la marge que le type à une productivité élevée.
- L'individu qui fait problème du point de vue des contraintes d'incitation, c'est-à-dire celui qui est indifférent entre son panier et celui de l'autre, doit être traité comme au premier rang. Par conséquent, il n'est pas taxé au dernier euro gagné.
- La taxation optimale fait attention au haut type car il contribue davantage à la production. C'est lui qui rapporte le plus à la maison commune. De ce point de vue statique, la taxation optimale fait l'impasse sur les trappes à pauvreté.
- Le cas $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ correspond à des impôts forfaitaires, comme pour la solution de taxation optimale en premier rang. On considère généralement que des impôts forfaitaires ne sont pas réalisables, du moins à grande échelle.
- Le cas "normal" est celui où l'individu le plus doué est imposé : on préfère privilégier le bien-être des plus malheureux, c'est-à-dire des bas types ($\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 > 0$). Les moins talentueux sont découragés à travailler et reçoivent une compensation pécunière (ce qui n'est pas gagné sur le marché du travail est *au moins* récupéré en terme de transferts). Cette logique conduit aux trappes à pauvreté. Il vaut mieux décourager un agent qui rapporte peu à la collectivité (en terme de production) que l'inverse. L'une des faiblesses de la taxation optimale est de ne pas tenir compte du fait que l'imposition peut décourager *dynamiquement* les personnes à travailler. La taxation optimale (statique) ne prend pas en compte l'effet externe dynamique engendré par le découragement des moins talentueux.

Indiquons à présent de manière plus précise pourquoi le cas 3 ne peut pas être envisagé comme un cas normal pour un utilitariste.

Proposition 3 *Supposons que la fonction d'utilité soit additivement séparable en loisir et en consommation et la fonction de bien-être utilitariste. Alors le cas* 3 *où le bas type est contraint* $(\lambda_1 > 0; \lambda_2 = 0)$, *ne peut pas survenir pour n'importe quelle distribution de la population entre les deux types.*

Preuve. On rappelle que l'utilitarisme correspond à l'aversion la plus faible à l'inégalité (aversion nulle). Les poids des différents individus sont égaux à 1. On considère la fonction d'utilité suivante :

$$V(c_i, y_i) = u(c_i) - v(y_i) \tag{1.35}$$

avec $v(y_i) = v\left(\frac{y_i}{\omega_i}\right)$, $u' > 0$, $u'' < 0$, $v' > 0$, $v'' > 0$. μ, le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte que l'individu conserve la même utilité (1.2), est égal à 1. On reprend le calcul des conditions du premier ordre du problème d'optimisation avec $\mu = 1$, $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 = 0$. On obtient :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_1} = 0 \Leftrightarrow (1 + \lambda_1) u'(c_1) = \gamma n_1 \Leftrightarrow u'(c_1) = \frac{\gamma n_1}{1 + \lambda_1} \tag{1.36}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_2} = 0 \Leftrightarrow u'(c_2) - \lambda_1 u'(c_2) = \gamma n_2 \Leftrightarrow u'(c_2) = \frac{\gamma n_2}{1 - \lambda_1} \tag{1.37}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_1} = 0 \Leftrightarrow (1 + \lambda_1) v'(y_1) = \gamma n_1 \tag{1.38}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_2} = 0 \Leftrightarrow (1 - \lambda_1) v'(y_2) = \gamma n_2 \tag{1.39}$$

De (1.36) et (1.37), on tire :

$$\frac{u'(c_2)}{u'(c_1)} = \frac{n_2}{n_1} \frac{1 + \lambda_1}{1 - \lambda_1} \tag{1.40}$$

La solution étant contrainte pour l'individu 1, on a $c_2 > c_1$ en raison de Spence-Mirrlees. L'utilité marginale décroît avec la consommation (concavité de U). Par suite, $u'(c_2) < u'(c_1)$ et $\frac{u'(c_2)}{u'(c_1)} < 1$. On en déduit que

$$\frac{n_2}{n_1} \frac{1 + \lambda_1}{1 - \lambda_1} < 1 \tag{1.41}$$

D'où :

$$\frac{n_2}{n_1} < \frac{1 - \lambda_1}{1 + \lambda_1} < 1 \tag{1.42}$$

On obtient donc déjà une restriction sur les effectifs pour que le cas 3 puisse survenir. ∎

La frontière des utilités en second rang est tangeante à la frontière en premier rang. Ainsi, sur la figure **??**, R est la solution Rawlsienne, LF le laissez-faire.. Dans le cas 3, on subventionne les plus productifs dont les choix connaissent une distorsion en faveur du travail. Les agents de type 2 se mettent à travailler davantage. Par rapport au laissez-faire, le revenu national est plus important mais le bien-être plus faible : il y a trop de travail et pas assez de loisir. La partie de la frontière des utilités au second rang comprise entre le laissez-faire et le maximin constitue *in fine* l'intervalle de choix pour la politique économique et sociale.